[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

تصحيح

فهرست الجزء الثانى من المنهج الزهرية فى الاعمال الجبرية

الباب الرابع

١٦ | ٢٥١

في طريقة المكررات غير المعينة

ا

ب

ح

الجزء الثاني من المستخرجة المصرية ـ د = هـ ـ و

محمد

في الاعمال الجبرية

طبع بمطبعة مدرسة المهندسخانة الخديوية

١٢٦٨

ويستنتج من المتساوية $ح+و=ه+د$ أن $ح-د=ه-و$

أعني إذا ساوى حاصل جمع عددين حاصل جمع عددين آخرين يتركب من هذه الأعداد الأربعة متناسبة عددية جزا أحد الحاصلين طرفاها وجزا الآخر وسطاها

والوسط التفاضلي لعددين يساوي نصف حاصل جمعهما لأنه من المتناسبة

$ح . س : س . د$ يحدث

$٢س = ح + د$ ومن هذه المتساوية ينتج

$$س = \frac{ح+د}{٢}$$

في المتناسبة الهندسية

بند ٩٣ كل متناسبة هندسية كالمتناسبة $ح : د :: ه : و$

توضع هكذا $\frac{ح}{د} = \frac{ه}{و}$ ومن هذه المتساوية ينتج

$$ح و = د ه \quad ، \quad و = \frac{د ه}{ح} \quad ، \quad ه = \frac{ح و}{د}$$

أعني أن كل متناسبة هندسية حاصل ضرب طرفيها يساوي حاصل ضرب وسطيها وأن أحد طرفيها يساوي خارج قسمة حاصل ضرب وسطيها على طرفها الآخر وأن أحد وسطيها يساوي خارج قسمة حاصل ضرب طرفيها على الوسط الآخر

ويستنتج من كل متساوية كالمتساوية $ح و = د ه$ أن $\frac{ح}{د} = \frac{ه}{و}$

أعني متى كان حاصل ضرب عددين مساويا لحاصل ضرب عددين آخرين يتركب من هذه الأربعة أعداد متناسبة هندسية أصلا أحد الحاصلين

بسم الله الرحمن الرحيم

الباب الرابع

في المتناسبات والمتواليات العددية والهندسية والمتباينات والكسور المتسلسلة والحل غير المعين للمعادلات ذات الدرجة الاولى

في المتناسبة العددية اى التفاضلية

نبذة ٩٦ براهين خواص المتناسبة المقررة في كتب علم الحساب تسهل جدًا بواسطة القواعد الجبرية وبيان ذلك أن يقال

كل متناسبة عددية كالمتناسبة

ح . ء : هـ . و

توضع هكذا

ح − ء = هـ − و ومنها يستخرج

ح + و = هـ + ء ، و = هـ + ء − ح ، هـ = ح + و − ء

أعني أن كل متناسبة عددية حاصل جمع طرفيها يساوي حاصل جمع وسطيها وأن أحد طرفيها يساوي حاصل جمع وسطيها منقوصًا منه الطرف الآخر وأن أحد وسطيها يساوي حاصل جمع طرفيها منقوصًا منه الوسط الآخر

ويستنتج

واذا كان لمتناسبتين نسبة مشتركة تركب من النسبتين الآخريين متناسبة فالمتناسبتان

ح : ء :: هـ : و , ح : ء :: هـَ : وَ   يوضعان هكذا

$\frac{\text{ح}}{\text{ء}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}}$, $\frac{\text{ح}}{\text{ء}} = \frac{\text{هـَ}}{\text{وَ}}$. ومن هاتين المتساويتين يحدث

$\frac{\text{هـ}}{\text{و}} = \frac{\text{هـَ}}{\text{وَ}}$ أى هـ : و :: هـَ : وَ

ومتى اتحد المقدمات أو التاليات فى متناسبتين تركب من غير المتحد منهما متناسبة لانه اذا فرضت المتناسبتان ح : ء :: هـ : و , ح : ع :: هـ : ك أو

ء : ح :: و : هـ , ع : ح :: ك : هـ

استنتج منهما بمقتضى ما تقدم

ح : هـ :: ء : و , ح : هـ :: ع : ك فاذاً يحدث

ء : و :: ع : ك أى ء : ع :: و : ك

وكل متناسبة هندسية كالمتناسبة ح : ء :: هـ : و يمكن وضعها هكذا $\frac{\text{ح}}{\text{ء}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}}$ وباضافة واحد لكل من طرفى هذه المتساوية أو طرحه منها تؤول الى

$$\frac{\text{ح}}{\text{ء}} \pm 1 = \frac{\text{هـ}}{\text{و}} \pm 1$$ أى

$$\frac{\text{ح} \pm \text{ء}}{\text{ء}} = \frac{\text{هـ} \pm \text{و}}{\text{و}}$$ ومنها يحدث

ح + ء : ء :: هـ + و : و , ح − ء : ء :: هـ − و : و

ويحدث أيضا من مقارنة المتناسبة ح : ء :: هـ : و مع كل من المتناسبتين

واصلا الحاصل الآخر وسطانها

ويستنتج من المتساوية ﺣ و = ء ﻫ بناء على ما تقدم ثمان متناسبات

ﺣ : ء :: ﻫ : و   ﺣ : ﻫ :: ء : و   و : ء :: ﻫ : ﺣ   و : ﻫ :: ء : ﺣ

ء : ﺣ :: و : ﻫ   ء : و :: ﺣ : ﻫ   ﻫ : و :: ﺣ : ء   ﻫ : ﺣ :: و : ء

فيشاهد من متناسبات الصف الاول الأربعة أن الأربعة أعداد المتناسبة مع بعضها يتكون منها متناسبة أيضًا بتغيير موضع الوسطين أو الطرفين ويشاهد أيضًا من متناسبات الصف الثانى الأربعة أن التناسب لا يتغير بتغيير الطرفين بالوسطين والوسطين بالطرفين

والوسط الهندسى بين عددين أو كميتين يساوى جذر حاصل ضربهما لانه من المتناسبة ﺣ : س :: س : ء يحدث

$س^2 = ﺣ \times ء$ أو $س = \sqrt{ﺣ \times ء}$

واذا ضرب طرف ووسط متناسبة فى عدد واحد أو قسما عليه بقيت المتناسبة على حالها لانه يستنتج من المتساوية $\frac{ﺣ}{ء} = \frac{ﻫ}{و}$ أنَّ

$\frac{ﺣ}{ء} = \frac{ﻫم}{وم}$ أو ﺣ : ء :: ﻫم : وم

ويستنتج أيضًا من المتساوية المذكورة $\frac{ﺣ}{ﻫ} = \frac{ء}{و}$ ومن هذه يحدث

$\frac{ﺣ}{ﻫ} = \frac{ءم}{وم}$ أى ﺣ : ﻫ :: ءم : وم

ويمثل هذا يبرهن على حالة القسمة

تسمى متناسبة متوالية

وكل متناسبة متوالية حاصل جمع مقدماتها الى حاصل جمع تالياتها كنسبة أي مقدم الى تاليه فاذا رمز للنسبة المشتركة في هذه المتناسبة بالحرف ل نحصل

جـ/د = ل ، هـ/و = ل ، ز/ح = ل ، ط/ى = ل ..... الخ

ومنها يحدث

جـ = د ل ، هـ = و ل ، ز = ح ل ، ط = ى ل ..... الخ

وبجمع هذه المتساويات طرفاً الى طرف يحدث

جـ + هـ + ز + ط + الخ = ل (د + و + ح + ى + ... الخ)

ومنها يحدث

(جـ + هـ + ز + ط + ... الخ) / (د + و + ح + ى + ... الخ) = ل = جـ/د = هـ/و = الخ فاذا يكون

جـ + هـ + ز + ط + ... الخ : د + و + ح + ى + ... الخ :: جـ : د :: هـ : و :: الخ

واذا ضربت جملة متناسبات بالترتيب في بعضها تكون من حواصل الضرب الاربعة المختلفة متناسبة فالمتناسبات

جـ : د :: هـ : و ، جـ′ : د′ :: هـ′ : و′ ، جـ″ : د″ :: هـ″ : و″ يحدث منها

جـ/د = هـ/و ، جـ′/د′ = هـ′/و′ ، جـ″/د″ = هـ″/و″ وبضربها يحدث

(جـ جـ′ جـ″)/(د د′ د″) = (هـ هـ′ هـ″)/(و و′ و″) ∴ جـ جـ′ جـ″ : د د′ د″ :: هـ هـ′ هـ″ : و و′ و″

واذا رفع كل من الحدود الاربعة لمتناسبة الى درجة ما أو أخذ جذر كل منها

المتقدمين

ومنها يحدث ح+د : ح :: ه+و : ه ، ح−د : ح :: ه−و : ه

ح+د : ح−د :: ه+و : ه−و

وينتج من ذلك أن نسبة المقدم الأول زائدًا أو ناقصًا تاليه الأول الى هذا التالى كنسبة المقدم الثانى زائدًا أو ناقصًا التالى الثانى الى هذا التالى وأن نسبة المقدم الأول زائدًا أو ناقصًا التالى الأول الى هذا المقدم كنسبة المقدم الثانى زائدًا أو ناقصًا التالى الثانى الى هذا المقدم وأن نسبة المقدم الأول زائدًا تاليه الى هذا المقدم ناقصًا تاليه كنسبة المقدم الثانى زائدًا تاليه الى هذا المقدم ناقصًا تاليه

وإذا غير وسطا المتناسبة ح : د :: ه : و آلت الى

ح : ه :: د : و ومنها يحدث بناءً على ما تقدم

ح±ه : د±و :: ه : و :: ح : د ومنها يحدث

ح+ه : د+و :: ح−ه : د−و

أعنى أن نسبة حاصل جمع أو فاضل مقدمى متناسبة الى حاصل جمع أو فاضل تاليها كنسبة أى مقدم الى تاليه وأن نسبة حاصل جمع المقدمين وحاصل جمع التاليين تعادل النسبة بين فاضل المقدمين وفاضل التاليين

والمتناسبة التى بهذه الصورة ح : د :: ه : و :: ز : ح :: ط : ى :: ك : ل

÷ حـ ، ء ، هـ ، و ، ز ، ح ، ط ، ... ، ك ، ل

ويعقبها حـ الى ء الى هـ الى و الى .... الخ

واذا رمز للأساس بالحرف ر وللحد الاول بالحرف حـ وللحد الأخير المسبوق بحدود عددها م - ١ بالحرف ل تحصل بمقتضى التعريف

ء = حـ + ر ، هـ = ء + ر ، و = هـ + ر ، ل = ك + ر أي

ء = حـ + ر ، هـ = حـ + ٢ر ، و = حـ + ٣ر .... ل = حـ + (م - ١) ر

اى أن أي حد من متوالية عددية يساوى الحد الاول مضافاً اليه حاصل ضرب عدد الحدود السابقة له في الأساس

وحيث أن المعادلة ل = حـ + (م - ١) ر ..... (١) تشتمل على اربع كميات فلا يمكن ادراك احدها الا بعد معرفة الثلاث الاخرى

واذا اريد ادخال جملة حدود عددها م بين أي حدين معلومين بشرط أن يتركب من الجميع متوالية عددية فيتضح أن هذه المتوالية لا تحتاج في تركيبها الا لتعيين أساسها المجهول ولذا يستخرج من معادلة (١)

$$ر = \frac{ل - حـ}{م - ١}$$

وحيث كان م = م + ٢ يكون

$$ر = \frac{ل - حـ}{م + ١}$$

أي أن أساس المتوالية المطلوبة يساوى خارج قسمة فاضل الحدين المعلومين

بدرجة واحدة لم تزل متناسبة

فالمتناسبة $\text{ح} : \text{د} :: \text{هـ} : \text{و}$ توضع هكذا

$\frac{\text{ح}}{\text{د}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}}$ فاذا رفع طرفا هذه المتساوية لدرجة ما أو اخذ جذراهما

بدرجة ما بقيت على حالها فيكون

$\frac{\text{ح}^{\text{م}}}{\text{د}^{\text{م}}} = \frac{\text{هـ}^{\text{م}}}{\text{و}^{\text{م}}}$, $\frac{\sqrt[\text{م}]{\text{ح}}}{\sqrt[\text{م}]{\text{د}}} = \frac{\sqrt[\text{م}]{\text{هـ}}}{\sqrt[\text{م}]{\text{و}}}$ ومنها يحدث

$\text{ح}^{\text{م}} : \text{د}^{\text{م}} :: \text{هـ}^{\text{م}} : \text{و}^{\text{م}}$, $\sqrt[\text{م}]{\text{ح}} : \sqrt[\text{م}]{\text{د}} :: \sqrt[\text{م}]{\text{هـ}} : \sqrt[\text{م}]{\text{و}}$

في المتواليات العدديه

بند ٩٤ كل متسلسلة مركبة من حدود يزيد أحدها عن سابقه أو ينقص عنه بكمية ثابتة تسمى متوالية عددية أو تفاضلية والكمية الثابتة تسمى اساس المتواليه

فالمتسلسلتان

١ و ٤ , ٧ , ١٠ , ١٣ , ١٦ , ١٩ , ٢٢ , ٢٥ و

٦٠ , ٥٦ , ٥٢ , ٤٨ , ٤٤ , ٤٠ , ٣٦ , ٣٢ , ٢٨

تسميان متواليتين الاان الاولى تسمى متوالية عددية تصاعدية اساسها ثلاثة والاخرى تنازلية اساسها أربعة فالمتوالية العددية تكون تصاعدية او تنازلية بحسب كون اساسها موجبا أو سالبا

واذا رمز بالحروف ح , د , هـ , و ..... لحدود متوالية عددية توضع هكذا

ولايجاد قانون مختصر عن هذه نوضع المتساوية المتقدمة بهاتين الصورتين

ج = ح + (ح + ى) + (ح + ٢ى) + ... + (ل − ٢ى) + (ل − ى) + ل

ج = ل + (ل − ى) + (ل − ٢ى) + ... + (ح + ٢ى) + (ح + ى) + ح

ثم بجمع هاتين المتساويتين طرفا الى طرف وملاحظة أن حاصل جمع كل حدين متحدين فى الرتبة يؤول الى ح + ل يتحصل

٢ج = ح + ل مكررًا بقدر عدد الحدود أى

٢ج = (ح + ل) ن ومنها يحدث

ج = (ح + ل) ن / ٢ .... (٢)

اعنى أن حاصل جمع حدود متوالية تفاضلية يساوى نصف حاصل جمع حديها المتطرفين مكررًا بقدر عدد حدودها

واذا وضع فى قانون (٢) بدل الحد الاخير ل مقداره المبين بمعادلة (١) آل الى

ج = [٢ح + (ن − ١) ى] ن / ٢

٩٦ تحل المسائل المتعلقة بالمتواليات العددية بواسطة معادلتى (١) و(٢) وذلك انه اذا علم ثلاث كميات من الخمس ح، ى، ن، ل، ج الداخلة فى معادلتى (١) و(٢) أمكن تعيين الاثنين الآخرين ومن تعشيق هذه الكميات الخمس مع بعضها بفرض ثلاث منها معلومة وباقيها مجهولًا يحدث عشر مسائل سهلة الحل

على عدد الحدود المدخلة زائدًا واحدًا

فاذا اريد ادخال ثمانية حدود بين العددين ٤ ، ٤٩ بحيث يتركب من الجميع متوالية عددية وضع في المعادلة $ر = \frac{ل - حـ}{م + ١}$ بدل ل ، حـ ، م مقاديرها وهي ٤٩ ، ٤ ، ٨ فيتحصل $ر = \frac{٤٩ - ٤}{٩} = \frac{٤٥}{٩} = ٥$ أعني أن الأساس المطلوب يساوي ٥ وحينئذ تركب المتوالية هكذا

÷ ٤ . ٩ . ١٤ . ١٩ . ٢٤ . ٢٩ . ٣٤ . ٣٩ . ٤٤ . ٤٩

وحاصل جمع كل عددين كائنين على ابعاد متساوية من طرفي متوالية يساوي حاصل جمع هذين الطرفين من المتوالية العددية

÷ حـ . ى . هـ . و . ع . ط . ل فيتحصل

$ى = حـ + ر$ و $ط = ل - ر$ ومنهما يحدث

$ى + ط = حـ + ل$

وقس على هذا

ثم واذا اريد تحصيل مقدار حاصل جمع حدود متوالية عددية كالمتوالية

÷ حـ . ى . هـ .... ل

يتحصل بالبناء على ما تقدم

$ع = حـ + (حـ + ر) + (حـ + ٢ر) + ... + [حـ + (م - ١) ر]$

بالرمز بالحرف ع لمقدار حاصل جمع حدود المتوالية المطلوب

والايجاد

(١٠٧)

من معادلة (١) مقدار ح فيكون

ح = ل - (ء - ١) ر .... (٤)

ثم يوضع مقدار ح في معادلة (٢) بدله ويستخرج مقدار ء فيحدث

ء = ١/٢ر [ر + ٢ل ± √((ر + ٢ل)^٢ - ٨ ر ج)]

وهو قانون يعلم منه مقدار المجهول ء

فاذا فرض ل = ٩ ، ج = ١٠ ، ر = ٢ حدث ء = ٣ ، ء = ٧

وبناء عليه يكون مقدارا ح المطابقان لمقداري ء والمستخرجان من معادلة (٤) هما +٥ ، -٣ فحينئذ تحدث المتواليتان

÷ ٥ . ٧ . ٩ ، ÷ -٣ . -١ . +١ . +٣ . +٥ . +٧ . +٩

وهاك جدولا يشتمل على حل المسائل العشر المتقدمة ذكرناه هنا لمن يريد الممارسة في ذلك

لانه يحصل دائماً معادلتان مشتملتان على مجهولين

ونقتصر على حل المسائل الآتية الى حل معادلة بدرجة ثانية فنقول ـــــ

المسئلة الاولى اذا علم ح ، ع ، ر واريد تعيين ن ، ل بحذف المجهول ل من معادلتى (١) ، (٢) فيحصل

ن = ١/٢ر [ر − ٢ح ± √((ر − ٢ح)² + ٨رع)] ..... (٣)

واذا وضع بدل ن فى المعادلة (١) مقداره توصل الى مقدارى ل المطابقين لها لكن لامكانية حل هذه المسئلة يلزم أن يكون ن عدداً صحيحاً موجباً

فاذا فرض فى قانون (٣) ح = +٩ ، ع = ١٢ ، ر = −٢ حدث ن = +٣ ، ن = +٧ فاذاً يحدث من قانون (١) المقداران المطابقان للمجهول ل وهما +٥ ، −٣ وحيث كان لكل من المجهولين مقداران يمكن تركيب متواليتين موافقتين لمنطوق المسئلة هما

÷ ٩ . ٧ . ٥ ، ÷ ٩ . ٧ . ٥ . ٣ . ١ . −١ . −٢ ، −٣

واذا فرض ايضاً فى المعادلتين المتقدمتين ح = ٣ ، ع = ٢٤ ، ر = ٢ تحصل ن = ٤ ، ن = −٦ ومن حيث أن ن ليس له الا مقدار موجب لا يحصل الا متوالية موافقة لمنطوق المسئلة هى

÷ ٣ . ٥ . ٧ . ٩

المسئلة الثانية اذا علم ل ، ع ، ر واريد تعيين ن ، ح استخرج

الثالثة المطلوب معرفة عدد طابور مثلثى صفه الاول نفر واحد والثانى نفران والثالث ثلاثة وهكذا الصف يكون عدد انفاره مساويًا م

الرابعة المطلوب ايجاد حاصل جمع حدود المتوالية الفردية ÷ ١ , ٣ . ٥ . ٧ . ٩ .. التى عدد حدودها م

الخامسة طريق بعيدة عن تل رمل بمقدار ٤٠ مترا يراد ترميلها وقد عملت مقايسة ذلك فوجد انه يلزم لترميلها شحن مائة عربانه كل منها بعيدة عن مجاورتها بستة امتار بشرط ان يكون موضع العربانه الاولى على بعد من التل يساوى ٤٠ مترا وان ترجع العربانة الاخيرة الى المحل الذى شحنت منه والمطلوب معرفة عدد الأمتار التى يقطعها سواق العربانات فى ترميل الطريق المذكورة

السادسة راجل يقطع عشرة فراسخ فى اليوم الواحد وفارس يقطع فى اول يوم ثلاثة فراسخ ويزيد سيره فى كل يوم عن سابقه فرسخين سارا فى آن واحد والمطلوب معرفة عدد الأيام التى تمضى من ابتداء سيرهما لنقطة تلاقيهما والمسافة التى يقطعها كل منهما

فى المتواليات التغييرية أى الهندسية

كل متسلسلة مركبة من جملة حدود متتابعة خارج قسمة أحدها على سابقه ثابت أو كل حد منها مساوٍ لسابقه مضروبًا فى كمية ثابتة تسمى متوالية والكمية الثابتة تسمى أساس المتوالية

عدد المسائل	معاليم	مجاهيل	مقادير المجاهيل	
١	ح ء ن	ل ج	$ل = ح + (ن-1)ء$	$ج = \frac{1}{2}ن[2ح + (ن-1)ء]$
٢	ج ء ن	ح ل	$ح = \frac{2ج - ن(ن-1)ء}{2ن}$	$ل = \frac{2ج + ن(ن-1)ء}{2ن}$
٣	ل ء ن	ح ج	$ح = ل - (ن-1)ء$	$ج = \frac{1}{2}ن[2ل - (ن-1)ء]$
٤	ح ل ن	ج ء	$ج = \frac{1}{2}ن(ح+ل)$	$ء = \frac{ل-ح}{ن-1}$
٥	ح ج ن	ل ء	$ل = \frac{2ج}{ن} - ح$	$ء = \frac{2(ج - ح ن)}{ن(ن-1)}$
٦	ل ج ن	ح ء	$ح = \frac{2ج}{ن} - ل$	$ء = \frac{2(ل ن - ج)}{ن(ن-1)}$
٧	ح ل ء	ن ج	$ن = \frac{ل-ح}{ء} + 1$	$ج = \frac{(ل+ح)(ل-ح+ء)}{2ء}$
٨	ح ء ج	ن ل	$ن = \frac{ء - 2ح \pm \sqrt{(2ح-ء)^2 + 8ءج}}{2ء}$	$ل = ح + (ن-1)ء$
٩	ل ء ج	ن ح	$ن = \frac{ء + 2ل \pm \sqrt{(ء+2ل)^2 - 8ءج}}{2ء}$	$ح = ل - (ن-1)ء$
١٠	ح ل ج	ن ء	$ن = \frac{2ج}{ح+ل}$	$ء = \frac{(ل+ح)(ل-ح)}{2ج - (ل+ح)}$

مسائل يطلب حلها من الطالب

نمرة ٩٧ الاولى المطلوب تعيين الحد الاول وعدد الحدود من متوالية عددية اساسها ٨ وحدها الأخير ١٨٠ وحاصل جمعها ٩٤٥ ؟

الثانية المطلوب ادخال تسعة أوساط عددية بين أي حدين من المتوالية

÷ ٢ . ٥ . ٨ . ١١ . ١٤ . ١٧

الثالثة

واذا اريد تعيين الحد الثانى عشر من المتوالية

∴ ٦٤ : ١٦ : ٤ : ١ : $\frac{١}{٤}$ فانه يحصل

$٦٤ \times (\frac{١}{٤})^{١١} = \frac{٤^٣}{٤^{١١}} = \frac{١}{٤^٨} = \frac{١}{٦٥٥٣٦}$ وهو الحد الثانى عشر المطلوب

ويستعمل القانون $ل = ح ر^{ن-١}$ لادخال جملة حدود عددها م بين كميتين معلومتين ح , ل لتتركب من الكل متوالية هندسية وحيث أن عدد الحدود المدخلة م يكون عدد حدود المتوالية المراد تحصيلها م + ٢ ويكون الحد الأخير منها $ل = ح ر^{م+٢-١} = ح ر^{م+١}$ ومنها يستخرج الأساس المجهول ر فيكون

$$ر = \sqrt[م+١]{\frac{ل}{ح}}$$

يعنى أن الأساس يساوى جذر خارج قسمة الكميتين المعلومتين على بعضهما بدرجة تساوى م + ١

فاذا اريد مثلاً ادخال أربعة حدود بين العددين ٢ و ٤٨٦ يوضع فى مقدار ر بدل م , ل , ح مقاديرها وهى ٤ و ٤٨٦ و ٢ فيؤول الى $ر = \sqrt[٥]{\frac{٤٨٦}{٢}} = \sqrt[٥]{٢٤٣} = ٣$ وتركب المتوالية هكذا

∴ ٢ : ٢ × ٣ : ٢ × ٣٢ : ٢ × ٣٣ : ٢ × ٣٤ : ٢ × ٣٥

∴ ٢ : ٦ : ١٨ : ٥٤ : ١٦٢ : ٤٨٦

- حاصل ضرب كل حدين متماثلى الوضع من طرفى متوالية هندسية واحد

بمقتضى حد تعريف تكون متوالية تصاعدية أو تنازلية يجب أساسها
أي يجب كونه اكبر من الواحد أو أصغر منه فحينئذٍ تكون المتوالية

∷ ٣ : ٦ : ١٢ : ٢٤ : ٤٨ : ٩٦ تصاعدية

والمتوالية

∷ ٦٤ : ١٦ : ٤ : ١ : $\frac{١}{٤}$: $\frac{١}{١٦}$: $\frac{١}{٦٤}$ تنازلية

ويلفظ بها كالتلفظ بالمتوالية العددية وكل متوالية هندسية توضع هكذا

∷ ح : ء : هـ : و : ى : ع : ط : ...... ل

فاذا رمزنا بالحرف ى لاساسها وبالحرف ل لحدها الأخير المسبوق بحدود عددها
م − ١ فحصل

ء = ح ى ، هـ = ح ى^{٢} ، و = ح ى^{٣} ...... ل = ح ى$^{م-١}$

وحيث أن القانون ل = ح ى$^{م-١}$ ...... (١) مشتمل على الكميات الاربع
ح ، ى ، م ، ل يمكن تعيين احداها بمعرفة الثلاث الاخرى فاذاً يكون
الحد الأخير من متوالية هندسية مساوياً لحاصل ضرب الحد الاول في
الاساس مرفوعاً لدرجة مساوية لعدد الحدود السابقة له
فاذا اريد مثلاً تعيين الحد الثامن من المتوالية

∷ ٢ : ٦ : ١٨ : ٥٤

فانه يحصل ٢ × ٣^{٧} = ٢ × ٢١٨٧ = ٤٣٧٤ وهو الحد الثامن المطلوب

محمد

ابراهيم

داود الرشد

[illegible] المتواليات الهندسية [illegible] (٣)

[illegible] ح ، ر ، ل ، ع [illegible]

حينئذ يمكن تعيين اثنين [illegible] أن [illegible] يتوقف على

قواعد [illegible] المجهولين ح الذي هو عدد حدود المتوالية [illegible]

[illegible] المعادلة مشتملة على مجهول [illegible] كما لو كان المجهولان ح و ر

ل و ر [illegible] ذات درجة مساوية لعدد حدود

المتوالية

واذا [illegible] (٥) الحاد [illegible] معادلة (٣) بواسطة القسمة آل الامر

[illegible] ذات درجة مساوية [illegible]

واذا كان الاساس [illegible] معادلة (٥) بدل معادلة (٣) لانه

[illegible] ع مقدار غير معين أى أن ع = ÷

واما معادلة [illegible] له مقدار محدود أى أن ع = ح ن

وقد تقدم أن [illegible] ينشأ عن وجود مضروب مشترك فالمضروب

المشترك للمعادلة (٣) هنا هو (ر−١) انظر ([illegible])

١٠٥ متى كان الاساس المرموز له بالحرف ر أصغر من الواحد أى كسرا صارت المتوالية

تنازلية فحينئذ قانون (٣) يكتب هكذا

$$ع = \frac{ح(1-ر^{ن})}{1-ر} = \frac{ح}{1-ر} - \frac{ح ر^{ن}}{1-ر}$$

ر نه من متوالية

ب : د : ر : هـ : و : ى : ط يحدث

ب = حـ × ر و ى × ر = ط ومنها ينتج

ى × ر = حـ × ر × ر أعنى

ى × ر = " " "

وقس على ذلك فيحصل بالقياس . .

فاذا حسب مجموع متوالية .... يساوى بعدد الرمز له بالحرف ع

$ع = حـ + حـ ر + حـ ر^٢ + ... + حـ ر^{ن-١}$ .... (٢)

وبضرب هذه المعادلة فى ..... فى الأساس ر فيحدث

$ع ر = حـ ر + حـ ر^٢ + حـ ر^٣ + ... + حـ ر^{ن-١} + حـ ر^ن$ (٤)

وبطرح معادلة (٢) من معادلة (٤) يحدث

$ع (ر - ١) = حـ ر^ن - حـ = حـ (ر^ن - ١)$ ومنها يستخرج

$ع = \frac{حـ (ر^ن - ١)}{ر - ١}$ .... (٣)

واذا وضع ل بدل الحد الأخير الذى يساوى $حـ ر^{ن-١}$ فى معادلة (٣) تؤول الى

$ع = \frac{ل ر - حـ}{ر - ١}$

أعنى أن مجموع حدود متوالية هندسية يساوى خارج قسمة باقى طرح الحد

الأول من حاصل ضرب الحد الأخير فى الأساس مقسوما على باقى طرح الواحد من الأساس

يساوي مجموع حدوده مكررًا بقدر الأساس ر (ن) ثم يساوي ∴ يكون

$ح - ء = ع ر$ أو $ع (١ - ر) = ء$ ومنها يحدث

$$ع = \frac{ء}{١ - ر}$$

وهو مقدار مجموع حدود المتوالية المذكورة لأنه اذا اجريت عملية القسمة على المقدار

$\frac{ء}{١ - ر}$ حدث ∴ $ء : ء ر : ء ر^٢ : ء ر^٣$ .... الخ وهو ناتج غير مخالف

للمتوالية ∴ $ء : ى : ه : و$ ...... الخ المفروضة الا في تبديل الحدود

$ء ، ى ، ه$ .... الخ بمقاديرها المبينة بدلالة الحد الاول والأساس

تنبيه وهنا حالة غريبة حادثة من فرض $ء = ١ ، ر = ٢$ في المعادلة

$$\frac{ء}{١ - ر} = ء + ء ر + ء ر^٢ + \ldots\ الخ$$

وهي أنه بعد اجراء الفرض المتقدم يتحصل

$$\frac{١}{١ - ٢} \text{ أو } -١ = ١ + ٢ + ٤ + ٨ + \ldots\ الخ$$

وهو ناتج فاسد لان الطرف الأول من المعادلة المتقدمة سالب والثاني موجب

وأكبر من الأساس فلتصحيح هذا الناتج يلزم لحصول التعادل في

$$\frac{ء}{١ - ر} = ء + ء ر + ء ر^٢ + \ldots\ الخ$$

أن يكمل خارج القسمة فاذا اجري العمل الى الحد الرابع من خارج القسمة مثلا يحصل

$$\frac{ء}{١ - ر} = ء + ء ر + ء ر^٢ + ء ر^٣ + \frac{ء ر^٤}{١ - ر}$$

وباجراء الفرض المتقدم في هذه المعادلة يحدث

... ثم اذا ازداد العدد م شيأ فشيأ نقصت الكمية $\frac{حـ ر^م}{١-ر}$

... ويمكن أخذ العدد م كبيراً بحيث يكون المقدار $\frac{حـ ر^م}{١-ر}$

أصغر من كل كمية معلومة فيعلم من ذلك انه كلما أخذ عدد حدود أكبر من الحدود المتعاقبة للمتوالية

بالابتداء من الحد الأول قرب مقدار ع من $\frac{حـ}{١-ر}$ فاذاً يمكن أخذ عدد حدود كافية

ليكون حاصل جمعها مختلفاً عن $\frac{حـ}{١-ر}$ بقدر ما يراد وعليه فيقال أن نهاية حاصل

جمع جملة حدود من المتوالية التنازلية بالابتداء من الحد الأول تكون مساوية للكسر

$\frac{حـ}{١-ر}$ فاذا كان عدد حدود المتوالية لانهائياً كان حاصل جمعها مساوياً $\frac{حـ}{١-ر}$

أي أن حاصل جمع حدود متوالية تنازلية عدد حدودها لانهائي يساوي

خارج قسمة حدها الأول على فاضل الواحد والأساس

ويمكن تعيين هذا الحاصل من أول الأمر بفرض المتوالية التنازلية التي عدد حدودها ١٠٣

لانهائي هكذا

∵∵ حـ : د : هـ : و : .... الخ ومنها يحدث

د = حـ ر   هـ = د ر   و = هـ ر   و ....

وبجمع هذه المتساويات الأخيرة طرفاً الى طرف يحصل

د + هـ + و + ... الخ = (حـ + د + هـ + ... الخ) ر

وحيث أن الطرف الأول من هذه المتساوية الأخيرة يساوي حاصل جمع حدود

المتوالية المذكورة ما عدا الحد الأول أي يساوي ع − حـ وأن الطرف الثاني

يساوي

[illegible] الدائرى البسيط المركب

ويمكن تعيين [illegible] باستبدال [illegible] مكان [illegible] [illegible] قانون [illegible]

[illegible] متوالية تنازلية غير منتهية [illegible]

[illegible] ٠٫٥٧ يكون أصغر من [illegible]

[illegible] مائة مرة فاذاً يكون الكسر الدائرى المركب [illegible]

[illegible] = [illegible] / ٩٩٩٠٠ [illegible]

مسألة [illegible] المتوالية الهندسية

[illegible] الاولى الملك [illegible] مخترع الشطرنج [illegible] طلب مجازاته [illegible] في الخانة

الاولى حبة قمح وفى الثانية حبتان وفى الثالثة اربع وفى الرابعة ثمان [illegible]

أى أن يوضع في كل خانة [illegible] ضعف سابقتها الى [illegible] والستين [illegible] عدد

الحب الذى يأخذه المخترع المذكور

فالجواب أن عدد الحب المطلوب يساوى مجموع [illegible] هندسية [illegible]

منها ح = ١ و ر = ٢ و ن = ٦٤ فاذاً يكون

$$مج = \frac{ح(ر^ن - ١)}{ر - ١} = \frac{٢^{٦٤} - ١}{٢ - ١} = ٢^{٦٤} - ١ = ١٨٤٤٦٧٤٤٠٧٣٧٠٩٥٥١٦١٥$$

ومن المعلوم فى التجارب ان الكيلوجرام أى العشرة الالاف جرام تساوى

٢٦١٠٠٠ حبة تقريبا فيكون مقدار مج مساويا ٧٠٦٧٢١٨٠٣٠٩٠٤ [illegible]

كيلوجراما وحيث كان ثمن الكيلوجرام يساوى [illegible]

[illegible] التنازلية غير المنتهية

[illegible] الخ

[illegible] مقدارا [illegible] فتحصل

[illegible]

[illegible] التنازلية غير المنتهية

[illegible]

[illegible] بدل [illegible] مقدارا [illegible] فيتحصل

[illegible]

[illegible] الكسر الدائر بسيط بواسطة القانون المعد لايجاد [illegible] تنازلية غير منتهية لان الكسر الدائر البسيط [illegible] ٣٢٤، ٣٢٤ ٣٢٤ [illegible] مثلا يمكن وضعه بهذه الصورة

$$\frac{٣٢٤}{١٠٠٠} + \frac{٣٢٤}{١٠^{٦}} + \frac{٣٢٤}{١٠^{٩}} + \ldots\ldots\ldots$$ الخ

[illegible] المذكور حينئذ الى متوالية تنازلية غير منتهية مجموع حدودها يساوي

$ع = \frac{٣٢٤}{١٠٠٠} \div \left(١ - \frac{١}{١٠٠٠}\right) = \frac{٣٢٤}{٩٩٩}$ وهو مقدار الكسر الاعتيادي المكافئ

حصة الواهب الاول $\frac{٢}{٣} + \frac{١}{٩} - \frac{١}{٢٧} + \frac{١}{٨١}$

وحصة الواهب الثانى $\frac{١}{٣} - \frac{١}{٩} + \frac{١}{٢٧} - \frac{١}{٨١}$

وحيث زاد للواهب الاول $\frac{١}{٨١}$ من العبد يرجع للواهب الثانى منه ثلثه أى $\frac{١}{٢٤٣}$ وبناءً عليه تكون

حصة الواهب الاول $\frac{٢}{٣} + \frac{١}{٩} - \frac{١}{٢٧} + \frac{١}{٨١} - \frac{١}{٢٤٣}$

وحصة الواهب الثانى $\frac{١}{٣} - \frac{١}{٩} + \frac{١}{٢٧} - \frac{١}{٨١} + \frac{١}{٢٤٣}$ وهكذا

فقد نشأ من هذه الهبة الدور والتسلسل فاذاً تكون حصة كل منهما مساوية لفاضل حاصلى جمعى متواليتين متنازليتين غير نهائيتين فمتواليتا الواهب الثانى

$\because \frac{١}{٣} : \frac{١}{٢٧} : \frac{١}{٢٤٣} : \ldots\ldots$ لخ و $\because \frac{١}{٩} : \frac{١}{٨١} : \ldots\ldots$ لخ

ومنها ينتج أن حصته الحقيقية مساوية $\frac{٣}{٨} - \frac{١}{٨} = \frac{٢}{٨} = \frac{١}{٤}$

فقد آل الثلث الذى هو حصة الواهب الثانى الى الربع وبناءً عليه تكون

حصة الواهب الاول ثلاثة ارباع

فاذا اريد تعيين حصة الواهب الأول ـــ اجرى العمل المذكور فى تعيين حصة الواهب الثانى

الثالثة أحد المصورين عنده ٨ صور يريد بيعها فدفع له فى كل واحدة ١٥٠ غرشاً مرة واحدة ثم دفع له فى أقلها حسناً ثمن قدره خمسة غروش

فرنكا ٨٠٠٨١٠٧١٠٦٣٢ ٥ ٣١٤١ ١٤

الثانية مريض وهب لمريض آخر في مرض موته عبدًا له فوهبه الآخر في مرض موته للاول ولا شيء لهما سواه وحيث أن هبة مرض الموت لا تنعقد الا في الثلث ان كانت لغير وارث وله وارث أجازها باقي الورثة يكون للموهوب له $\frac{1}{3}$ العبد وللواهب ثلثاه وبهبته للموهوب له يرجع للواهب من هبة الثلث ثلثه وبناءً عليه فقد زاد ماله وزادت هبته للموهوب له ومتى زادت هبته للموهوب له زاد مال الواهب الاول وبناءً عليه يزيد مال الموهوب له وهكذا فاذًا يلزم الدور والمطلوب تعيين ما يخص كلًا من المريضين في العبد المذكور

فالجواب أن يفرض ثمن العبد أو نفسه مساويًا للواحد فيكون مقدار ما وهبه الاول منه مساويًا $\frac{1}{3}$ ومقدار هبة الموهوب له مساوية ثلث الثلث وبناءً عليه تكون حصة الواهب الاول $\frac{2}{3} + \frac{1}{9}$ وحصة الموهوب له $\frac{1}{3} - \frac{1}{9}$ وحيث زاد مال الواهب الاول ثلث الثلث أي $\frac{1}{9}$ يرجع للواهب الثاني ثلث $\frac{1}{9}$ أي $\frac{1}{27}$

فاذن تكون

حصة الواهب الأول $\frac{2}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27}$

وحصة الواهب الثاني $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27}$

وحيث زاد مال الواهب الثاني بمقدار ثلث التسع اى $\frac{1}{27}$ يرجع للواهب الاول منها ثلثها وهو $\frac{1}{81}$ فاذًا تكون

[illegible]

[illegible]

وكذا [illegible] متى [illegible]

ح > ى الا اذا كان [illegible]

د ويكون الفرق [illegible]

ح > ك . ومن المعلوم ان الفرق [illegible]

يكون فيها الفرق [illegible]

[illegible] دائما على شرط [illegible]

يمكن بيان الخواص الأصلية للمتباينات بما يأتي :

(٣) المتباينة لا تتغير متى ضرب طرفاها بكمية واحدة أو طرح منها كمية واحدة [illegible]

فرضت المتباينة ح > ى [illegible]

لأن الفرق ح – ى لما كان موجبا كان الفرق [illegible]

موجبا أيضا

وينتج من هذه القاعدة انه اذا اريد تحويل حد من طرف متباينة الى الآخر غيرت علامته

ومتى غيرت علامات حدود طرفي متباينة قلبت إشارتها [illegible]

ماكان في الطرف الأول الى الثاني وماكان في الثاني الى الأول

[illegible] بتضعيف [illegible] والمراد معرفة

[illegible]

(مسئلة [illegible] في [illegible])

برميل من النبيذ يحتوي على مائة اقة صار يؤخذ منه كل يوم اقة واحدة ويضاف إليه اقة ماء بدلها والمطلوب معرفة عدد مرات تكرار هذا الفعل حتى لا يبقى من النبيذ الا الربع

(الجواب أنه لابد من تكرار الفعل ١٨٣ مرة)

في المتباينات

لما كانت شروط مناقشة مسئلة موسسة في الغالب على المتباينات لزم بيان قواعدها ونتائجها أن نطبق عليها المزيد اختصارها قواعد التحويلات التي اجريت على المعادلات

هذا وإن كانت القواعد التي تبنى عليها هذه التحويلات بديهية لا تحتاج لتوضيح إلا أنه اقتضى الحال توضيحها هنا تجنبا للوقوع في التحويلات غير الصحيحة عندما يكون طرفا المتباينة سالبين

ومن البديهي أنه متى كانت كميتا ح ، د موجبتين وكان ح > د كان الفاضل ح - د موجبا ومبينا هكذا ح - د > ٠

ومتى كانت كمية ح موجبة و د سالبة كان ح > د لأن الكمية الموجبة

٨

وحدها ... بضرب ... فى العدد ... الى

٣س − ٢ > ٥س − ٨

وبتحويل الحدود المشتملة على المجهول س الى طرف والحدود المعلومة الى الآخر يتحصل

٢٠ س − ٥ ٢ س > ٠ ٢ − ٨ أو ٥ س > ١٢

وبقسمة كل من طرفيها على ٥ يحدث

س > ١٢/٥

وباجراء عمل مشابه للمتقدم فى المتباينة ٢/٣ − ٥/٢ س < ٩ − ٢ س يتحصل

س < ٨٢/٩

وكذا اذا اجرى العمل المتقدم على المتباينة ٣/٤ − ٥ س < ١٠ − ٨ س

تحصل س < −١١

فاذا فرض للمجهول الناتج من كل من المتباينات الثلاث مقادير فالمجهول الناتج من الاولى لا يفرض له الا المقادير التى تزيد عن المقدار ١٢/٥ أو ٢ ٢/٥ وهو النهاية الصغرى له

واما مجهول المتباينة الثانية فلا تفرض له الا المقادير التى دون المقدار ٨٢/٩ أى ٩ ١/٩ وهو النهاية الكبرى له

ﻳ د تتغير المتباينة متى ضرب كل من طرفيها فى كمية واحدة موجبة أو قسم كل منهما عليها

فاذا فرضت الكمية الموجبة المعلومة م آلت المتباينة ح > ء الى

م ح > م ء ، $\frac{ح}{م} > \frac{ء}{م}$ لانه لما كان الفرق ح ـ ء موجبا كان

حاصل ضربه فى م أو خارج قسمته عليه موجبا أيضا أعنى ان كلا من

م ح ـ م ء ، $\frac{ح}{م} - \frac{ء}{م}$ يكون موجبا

ويمكن البرهنة أيضا على هذه القاعدة بأن يقال أن حاصل ضرب الكميتين ح ، ء فى الكمية الموجبة م أو خارج قسمتهما عليها لا يختلف فى العلامة عن الكميتين المفروضتين وتكون النسبة بين أصلى حاصل الضرب أو خارج القسمة كالنسبة بين الكميتين ح ، ء المذكورتين ومتى ضرب طرفا متباينة فى كمية سالبة أو قسما عليها قلبت اشارتها لان هذا يؤول الى ضرب المتباينة فى كمية مطلقة وتغيير علامات جميع حدودها

بند ١٠٩ ومتى كان المجهول الداخل فى متباينة بدرجة أولى أمكن تحويلها الى صورة بحيث يكون فيها المجهول داخلا فى احد الطرفين بمكرر مساو للواحد كما تقدم فى حل المعادلة ذات الدرجة الاولى

فاذا فرضت المتباينة

[illegible] أن س > ٤٧/١٩

[illegible] نفرض للمجهول س في المقادير [illegible] ٤٧/١٩ أعني

[illegible] ولا يوجد من مقادير س انطباقه على شيء من مقادير س إلا

[illegible] محصورة بين النهايتين المتقدمتين

[illegible] من المتباينات ح > د ، ح' > د' ، ح'' > د'' أن

ح + ح' + ح'' + ... > د + د' + د'' + ...

[illegible] وهي ح − د ، ح' − د' ، ح'' − د'' لما كانت كلها موجبة كان حاصل

[illegible] وهو ح − د + ح' − د' + ح'' − د'' + ... أي

(ح + ح' + ح'' + ...) − (د + د' + د'' + ...) موجب

وإذا كانت الكميات ح ، ح' ، ح'' ، ...... و د ، د' ، د'' ، ......

كلها موجبة [illegible] من المتباينات ح > د ، ح' > د' ، ح'' > د'' ، ......

هذه المتباينة ح ح' ح'' ...... > د د' د'' ......

[illegible] كان كل من خوارج قسمة ح/د ، ح'/د' ، ح''/د'' أكبر من الواحد

كان حاصل ضربها في بعضها وهو (ح ح' ح'' ......)/(د د' د'' ......) أكبر من الواحد أيضا

وإن كانت الكميات ح ، ح' ، ح'' ...... و د ، د' ، د'' ...... كلها غير موجبة

استحال تحقق ما تقدم لأنه إذا فرضت المتباينتان ٨ > ٥ ، −٢ > −٤

كان حاصل ضرب طرفيهما الأولين −١٦ وحاصل ضرب طرفيهما الأخرين

وما معدات [illegible] فهو نهاية [illegible] لمجهول المتباينة الثالثة ونتيج منها

المقادير المفروضة للمجهول س تكون كلها [illegible] تزيد عن [illegible]

فاذا كان لمجهول س محققاً للمتباينتين الاولى معاً كانت [illegible]

بين $\frac{\text{٦}}{\text{٥}}$ و $\frac{\text{١}}{\text{٩}}$ واذا كان محققاً للمتباينة الثانية والثالثة معاً

كان محققاً لشرط س $<$ −١١ وبالجملة فلا يوجد مقدار للمجهول س

يكون محققاً للمتباينة الاولى والثالثة معاً

ونعتبر الآن حالة دخول مجهولي س و ص بدرجة اولى في المتباينتين

$$\text{٣س} - \text{٢ص} > \text{٥} \quad \text{و} \quad \text{٥س} + \text{٣ص} > \text{١٦}$$

فينتج منها

$$\text{س} > \frac{\text{٥} + \text{٢ص}}{\text{٣}} \quad , \quad \text{س} > \frac{\text{١٦} - \text{٣ص}}{\text{٥}}$$

فاذا فرض للمجهول ص أي مقدار اختياري أمكن أن يفرض للمجهول س

جميع المقادير التي تزيد عن اكبر الكميتين

$$\frac{\text{٥} + \text{٢ص}}{\text{٣}} \quad , \quad \frac{\text{١٦} - \text{٣ص}}{\text{٥}}$$

ويستنتج أيضاً من المتباينتين المذكورتين أن

$$\text{ص} < \frac{\text{٣س} - \text{٥}}{\text{٢}} \quad , \quad \text{ص} > \frac{\text{١٦} - \text{٥س}}{\text{٣}}$$

ويلزم لتحقيق ذلك أن يكون

$$\frac{\text{٣س} - \text{٥}}{\text{٢}} > \frac{\text{١٦} - \text{٥س}}{\text{٣}}$$

ومن

وحينئذ يكون

ح + حَ + حً + ... > (ز + زَ + زً + ...) ك ن

ح + حَ + حً + ... < (ز + زَ + زً + ...) كَ

ومنها يحدث

(ح + حَ + حً + ...) ÷ (ز + زَ + زً + ...) > ك ن

(ح + حَ + حً + ...) ÷ (ز + زَ + زً + ...) < كَ   وحينئذ يثبت المطلوب

مسائل تحل بواسطة المتباينات

الاولى ما العدد الذى اذا طرح من ضعفه ٥ كان الباقى اكبر من ٢٥ واذا طرح من ثلاثة امثاله ٧ كان الباقى اكبر من ضعفه زائدًا ١٣

لحل هذه المسئلة يقال اذا رمز للعدد المجهول بالرمز س تحصل

٢س − ٥ > ٢٥
٣س − ٧ > ٢س + ١٣   ومنها ينتج
س > ١٥ ، س > ٢٠

أعنى أن كل عدد اكبر من ٢٠ يكون حلًا للمسئلة وحينئذ يكون عدد الحلول غير منته

الثانية ما العدد الذى اذا طرح من ضعفه ٥ كان باقى الطرح اكبر من ٢٥ واذا طرح من ثلاثة امثاله ٧ كان الباقى أصغر من ضعف

[illegible] فيه يكون خامس [illegible] أكبر من الثالث وحيث أن هذا من المستحيلات

[illegible] سبق عاما

وإذا كانت الكميتان ح ، ء موجبتين فإنه ينتج من متباينة ح > ء المتباينة

ح^م > ء^م وإذا كانت كلتا الكميتين ح ، ء سالبة استحال الجواز ما تقدم

لأنه إذا فرضت المتباينة −٣ > −٤ تحصل بناءً على ما ذكر (−٣)^٢ > (−٤)^٢

أعني ٩ > ١٦ وهذا محال

دعوى نظرية

بند ١١٢ إذا فرضت الكسور ح/ء ، ح'/ء' ، ح''/ء'' ذوات بسوط حيثما اتفقت مقامات

موجبة كان الكسر (ح + ح' + ح'' + ...)/(ء + ء' + ء'' + ...) وسطاً متناسباً بينها أعني أن

مقداره يكون محصوراً بين أكبرها وأصغرها

لأنه إذا جعل ك رمزاً لكمية أكبر من أكبر هذه الكسور ، ك' لكمية

أصغر من أصغرها حدث

ح/ء < ك ، ح'/ء' < ك ، ح''/ء'' < ك ، ...... الخ

ح/ء > ك' ، ح'/ء' > ك' ، ح''/ء'' > ك' ، ......

وينتج من ذلك

ح < ء ك ، ح' < ء' ك ، ح'' < ء'' ك ، .... و

ح > ء ك' ، ح' > ء' ك' ، ح'' > ء'' ك' ، ....

وحينئذ يكون

لذلك يقال اذا رمز لعدد الحصص بالرمز س تحصل

٢س − ٥ > ٢٥ ، ٣ س − ١٠ < ٢ + ٣٠ ومنهما ينتج

س > ١٥ ، س < ٢٠

وحينئذ فجميع المقادير المحصورة بين ١٥ و ٢٠ تكون حلولا للمسئلة وحيث أن الحل المطلوب صحيح فيكون لهذه المسئلة اربعة حلول هي

١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٩

الخامسة سئل رجل عن عمره فأجاب أنه اذا ضم لثلاثة امثاله ٢ كان الحاصل أكبر من ضعفه زائدا ٦١ واذا طرح من خمسة امثاله ١٨ كان الباقي أصغر من أربعة امثاله مضافا اليه ٤٣

لذلك يقال اذا رمز لعمره بالرمز س تحصل

٣ س + ٢ > ٢ س + ٦١ و

٥ س − ١٨ < ٤ س + ٤٣ ومنهما يحدث

س > ٥٩ ، س < ٦١

أعني أن عدد عمره يكون محصورا بين ٥٩ و ٦١ فان كان العمر المطلوب تعيينه عددا صحيحا كان ٦٠ سنة بلا اختلاف

في الكسور المسلسلة

بند ١١٢ كل مقدار مركب من عدد صحيح ومن كسر بسطه صحيح ومقامه مركب من صحيح

تحل هذه المسئلة يقال اذا رمز للعدد المجهول بالرمز س تحصل

٢س − ٥ > ٢٥ و ٣س − ٧ < ٢س + ١٣ ومنها يحدث

س > ١٥ و س < ٢٠

اعنى أن مقدار المجهول س يكون محصوراً بين العددين ١٥ و ٢٠ ويكون عدد الحلول محدوداً

الثالثة ما العدد الذى اذا نقص من ضعفه ٥ كان الباقى أصغر من ٢٥ واذا نقص من ثلاثة امثاله ٧ كان الباقى أكبر من ضعفه زائداً ١٣

تحل هذه المسئلة يقال اذا رمز بالرمز س للعدد المجهول تحصل

٢س − ٥ < ٢٥ و

٣س − ٧ > ٢س + ١٣ ومنها يحدث

س < ١٥ و س > ٢٠

وحيث أن هذا غير ممكن فالمسئلة مستحيلة

الرابعة سئل احد الرعاة عن عدد ما يرعاه من الغنم فأجاب أنه اذا نقص من ضعف غنمه ٥ كان الباقى أكبر من ٢٥ واذا نقص من ثلاثة امثاله ٧ كان الباقى أصغر من ضعفه زائداً ١٣ والمطلوب معرفة عدد ما يرعاه من الغنم

يعني ... لكسور المتسلسلة تحدث بالصورة المتقدمة عند ما يراد تحويل كمية كسرية أو كمية غير جذرية الى عدد بحيث يكون مقداره مقربا بأقل من الواحد ... لأنه اذا اريد تقدير كمية حيثما اتفق كالكمية التي لا يمكن بيانها بعدد صحيح فانه يبحث في مبداء الأمر عن العدد الصحيح الذي يقرب من مقدارها وليكن ح مثلا فيكون الفرق س - ح كسرا اقل من الواحد ويرمز له بالكسر $\frac{1}{ص}$ يفرض ص عددا صحيحا اكبر من الواحد ثم يبحث عن العدد الصحيح د الذي يقرب من مقدار ص فيكون الفرق ص - د أقل من الواحد ويرمز له بالكسر $\frac{1}{ع}$ بفرض ع عددا صحيحا اكبر من الواحد وعلى هذا المنوال يتحصل

$$س = ح + \frac{1}{ص} ,\quad ص = د + \frac{1}{ع} ,\quad ع = هـ + \frac{1}{ر} ,\quad ر = و + \frac{1}{ح} \text{ وهكذا}$$

ومن هنا ينتج

$$س = ح + \cfrac{1}{د + \cfrac{1}{هـ + \cfrac{1}{و + \text{الخ}}}}$$

فان كانت احدى هذه الكميات س و ص و ع و ر و ؟ مبينة بعدد صحيح

إن الكسر بسيطه صحيح ومقامه مركب من صحيح مضافاً اليه كسر بسيطه صحيح ومقامه كذا يسمى كسراً متسلسلاً

مثل الكمية $ح + \cfrac{ب}{ء + \cfrac{ج}{هـ + \cfrac{هـ}{و + \cfrac{و}{ح + ك}}}}$

تسمى كسراً متسلسلاً سواء كانت الكميات ح، ء، هـ، ..... ك، ب، ج، هـ، ..... ك الدالة على اعداد صحيحة موجبة أو سالبة وباجراء عمليات الحساب الموجودة في هذه الكمية يتوصل الى كسر اعتيادي مساوٍ لقيمة الكسر المتسلسل فاذا فرض الكسر المتسلسل $٣ + \cfrac{٢}{٥ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{٣}{٤}}}$ نحصل على التوالى

$$١ + \frac{٣}{٤} = \frac{٧}{٤} \,،\quad \cfrac{١}{١ + \cfrac{٣}{٤}} = \frac{٤}{٧} \,،\quad ٥ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{٣}{٤}} = ٥ + \frac{٤}{٧} = \frac{٣٩}{٧} \quad و$$

$$\cfrac{٢}{٥ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{٣}{٤}}} = \cfrac{٢}{\frac{٣٩}{٧}} = \frac{١٤}{٣٩} \,،\quad ٣ + \cfrac{٢}{٥ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{٣}{٤}}} = ٣ + \frac{١٤}{٣٩} = \frac{١٣١}{٣٩}$$

لكنه يفرض لسهولة العمل أن بسط كل من الكسور التي يتركب منها الكسر المتسلسل يكون مساوياً للواحد أعني أنه يفرض أن كلاً من ب، ج، هـ، ..... يكون مساوياً للواحد وحينئذٍ يؤول الكسر المتسلسل المذكور الى

ح + ١

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\ldots}}}+1=\frac{1103}{887}$$

وحيث أن البحث عن القاسم المشترك الأعظم بين عددين لا يوصل الى الخارج قسمة مبين بعدد صحيح فلا يمكن تحويل كمية منتهية الى كسر متسلسل غير منته وكذلك كل كسر متسلسل منته يمكن تحويله الى كمية منطقة لانه مقتصر ... متى كان كسر متسلسل محدودا أمكن تحويله دائما الى كسر نحو ... القيمة ويؤخذ من ذلك أنه متى اريد تحويل كمية غير جذرية ... كان هذا الكسر غير منته

لبيان تحويل كمية غير جذرية الى كسر متسلسل كالكمية

$$\frac{3+\sqrt{7}}{2}$$

يقال حيث أن الجذر التربيعي للرقم ٧ محصور بين العددين ٢ ، ٣ فالكمية المفروضة تكون محصورة بين $\frac{5}{2}$ ، $\frac{6}{2}$ ويكون العدد الصحيح ... هي عليه هو ٢ وحينئذ يوضع

$$\frac{3+\sqrt{7}}{2}=2+\frac{1}{ص}$$ ومنها يحدث

$$\frac{1}{ص}=\frac{\sqrt{7}-1}{2}$$ أو $$ص=\frac{2}{\sqrt{7}-1}=\frac{2(\sqrt{7}+1)}{6}=\frac{\sqrt{7}+1}{3}$$

وحيث أن الجذر التربيعي للرقم ٧ محصور بين ٢ ، ٣ فيكون ...

[illegible] الكسر غير [illegible]

[illegible] يراد تحويلها الى كسر متسلسل سميت بالكسر الاعتيادى

[illegible] من عددين صحيحين فيكون العدد الصحيح الذى يقرب

[illegible] خارج قسمة د على ء فاذا رمز لهذا الخارج بالرمز

[illegible] نحصل

$$\text{ح} = \text{ط} + \frac{1}{\text{هـ}}$$

[illegible] نسمة د على هـ بالرمز ءَ والباقى بالرمز و نحصل

$$\text{ء} = \text{دَ} + \frac{1}{\text{وَ}}$$

[illegible] انه يلزم لتحويل كسر اعتيادى الى متسلسل أن تجرى على حديه

[illegible] ايجاد القاسم المشترك الاعظم بين عددين مفروضين وذلك

[illegible] باجراء قسمة البسط على المقام

[illegible] خوارج القسمة المتوالية الناتجة من ذلك بالرموز حَ ، دَ ، هَ ، وَ ....

[illegible] الكسر المتسلسل الذى آل اليه الكسر الاعتيادى هكذا

$$\text{حَ} + \cfrac{1}{\text{دَ} + \cfrac{1}{\text{هَ} + \cfrac{1}{\text{وَ} + \cdots}}}$$

[illegible] بهذه المثابة

$$\frac{١١٠٣}{٨٨٧} =$$

$$ج + \cfrac{١}{د + \cfrac{١}{ه + \cfrac{١}{و + \text{الخ}}}}$$

فنحصل بمقتضى قواعد الكسور

$$ج = \frac{ج}{١} ، ج + \frac{١}{د} = \frac{ج د + ١}{د} ، ج + \cfrac{١}{د + \cfrac{١}{ه}} = \frac{(ج د + ١) ه + ج}{د ه + ١}$$

$$ج + \cfrac{١}{د + \cfrac{١}{ه + \cfrac{١}{و}}} = \frac{(ج د ه + ه + ج) و + ج د + ١}{(د ه + ١) و + د}$$

فأما الكسور $\frac{ج}{١}$ ، $\frac{ج د + ١}{د}$ ، $\frac{(ج د + ١) ه + ج}{د ه + ١}$ ، $\frac{(ج د ه + ه + ج) و + ج د + ١}{(د ه + ١) و + د}$

فهي المعروفة بالكسور المقربة أو الآئلة

وأما الكسور $\frac{ج}{١}$ ، $\frac{١}{د}$ ، $\frac{١}{ه}$ فتسمى بالكسور المكملة

وأما كميات ج ، د ، ه فتسمى في بعض الأحيان بالخوارج غير التامة

بيان سبب هذه التسمية

وبالتأمل في الآئلات المتقدمة يشاهد أن بسط الآئلة الثالثة مكون من حاصل ضرب بسط الآئلة التي قبلها في مقام الكسر المكمل الأخير زائدا بسط الآئلة التي قبلها بمرتبتين ومقام الآئلة المذكورة مركب من حاصل ضرب مقام الآئلة التي قبلها في مقام الكسر المكمل الأخير زائدا مقام الآئلة التي قبلها بمرتبتين ويتركب كل من بسط ومقام الآئلة الرابعة بهذه الكيفية أي

ث محصورة بين $\frac{٣}{٣}$ ، $\frac{٤}{٣}$ وحينئذ يوضع

$ص = \frac{\sqrt{٧}+١}{٣} = ١ + \frac{١}{ع}$ ومنها يحدث

$\frac{١}{ع} = \frac{\sqrt{٧}-٢}{٣}$ أو $ع = \frac{٣}{\sqrt{٧}-٢} = \sqrt{٧}+٢$

وباجراء العمل المتقدم يتحصل

$ث = \sqrt{٧}+٢ = ٤ + \frac{١}{ر}$ ن

$\frac{١}{ر} = \sqrt{٧}-٢$ ومنها $ر = \frac{١}{\sqrt{٧}-٢} = \frac{\sqrt{٧}+٢}{٣} = ١ + \frac{١}{ع}$ ن

$\frac{١}{ع} = \frac{\sqrt{٧}-١}{٣}$ ومنها $ع = \frac{٣}{\sqrt{٧}-١} = \frac{\sqrt{٧}+١}{٢} = ١ + \frac{١}{ل}$ ن

$\frac{١}{ل} = \frac{\sqrt{٧}-١}{٢}$ ومنها $ل = \frac{٢}{\sqrt{٧}-١} = \frac{\sqrt{٧}+١}{٣}$ وحينئذ يكون $ل = ص$

وعلى ذلك فقد تحولت الكمية $\frac{٣+\sqrt{٧}}{٢}$ بموجب هذا الحساب

الى الكسر المتسلسل

$$١ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{٤ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{٤ + \text{الخ}}}}}}}$$

الدوري حيث كانت المقامات الأربعة ١ ، ٤ ، ١ ، ١ دائرة مع العمل

ثم ولنعتبر الآن الكسر المتسلسل الحرفي

١١٧

$ح + \cfrac{١}{١ + ك}$

$$١+\cfrac{١}{٤+\cfrac{١}{٩+\cfrac{١}{٢+\cfrac{١}{١+\cfrac{١}{١+\cfrac{١}{٤}}}}}}$$

فانه يبدأ بتركيب الأمثلتين الأوليين اللتين بواسطتهما تتركب الأمثلات الآتية بعدها بمقتضى القاعدة المتقدمة وعليه يتحصل

$$\frac{١}{١}\ ,\ \frac{٥}{٤}\ ,\ \overset{٩}{\frac{٤٦}{٣٧}}\ ,\ \overset{٢}{\frac{٩٧}{٧٨}}\ ,\ \overset{١}{\frac{١٤٣}{١١٥}}\ ,\ \overset{١}{\frac{٢٤٠}{١٩٣}}\ ,\ \overset{٤}{\frac{١١٠٣}{٨٨٧}}$$

وذلك بأن توضع على استقامة واحدة الخوارج غير التامة ٩ , ٢ , ١ , ١ , ٤ ثم يضرب حدا الأمثلة الثانية وهما ٥ , ٤ في ٩ ثم يضم على التوالي للحاصلين الناتجين من ذلك حدا الأمثلة الأولى وهما ١ , ١ فيتحصل حدا الأمثلة الثالثة وهما ٤٦ , ٣٧ ولإيجاد حدي الأمثلة الرابعة يضرب حدا الأمثلة الثالثة وهما ٤٦ , ٣٧ في ٢ ويضم للحاصلين على التعاقب حدا الأمثلة الثانية أي يضم العدد ٥ للحاصل الأول والعدد ٤ للثاني فيتحصل حدا الأمثلة الرابعة المطلوبة وهما ٩٧ , ٧٨

ولإيجاد الأمثلة الخامسة والسادسة الخ يجري العمل بهذه المثابة وحينئذ تكون الأمثلة الأخيرة دالة دائماً على القيمة الحقيقية للكسر المتسلسل المفروض.

ومتى كان الكسر المتسلسل المفروض غير محتوٍ على عدد صحيح أخذ المقدار

تتركب بها الآئلة الثالثة وبهذه المثابة تتركب كل آئلة

ولبيان تعميم هذه القاعدة يبرهن على أنها اذا كانت موافقة لثلاث آئلات متوالية من أي رتبة كانت فانها تكون موافقة للآئلة الرابعة التالية لها ولذا نرمز للآئلات الاربع المتوالية بالرموز

$$\frac{\text{ع}}{\text{ع}'} \text{ ، } \frac{\text{ك}}{\text{ك}'} \text{ ، } \frac{\text{ن}}{\text{ن}'} \text{ ، } \frac{\text{ل}}{\text{ل}'}$$

ثم نرمز بالرمز $\text{ن}''$ لمقام الكسر المكمل الأخير للآئلة $\frac{\text{ن}}{\text{ن}'}$ وبالرمز $\text{ل}''$ لمقام الكسر المكمل الأخير للآئلة $\frac{\text{ل}}{\text{ل}'}$ ثم نفرض أن

$$\text{ن} = \text{ك}\,\text{ن}'' + \text{ع} \quad \text{،} \quad \text{ن}' = \text{ك}'\,\text{ن}'' + \text{ع}'$$

فيحصل مقدار الآئلة $\frac{\text{ل}}{\text{ل}'}$ من $\frac{\text{ن}}{\text{ن}'}$ بأن يوضع فيها بدل $\text{ن}''$ الكمية $\text{ن}'' + \frac{1}{\text{ل}''}$ فيحدث

$$\frac{\text{ل}}{\text{ل}'} = \frac{\text{ك}\left(\text{ن}'' + \frac{1}{\text{ل}''}\right) + \text{ع}}{\text{ك}'\left(\text{ن}'' + \frac{1}{\text{ل}''}\right) + \text{ع}'} = \frac{\text{ل}''\left(\text{ك}\,\text{ن}'' + \text{ع}\right) + \text{ك}}{\text{ل}''\left(\text{ك}'\,\text{ن}'' + \text{ع}'\right) + \text{ك}'} = \frac{\text{ن}\,\text{ل}'' + \text{ك}}{\text{ن}'\,\text{ل}'' + \text{ك}'}\,.$$

وحينئذ نشاهد أن الآئلة $\frac{\text{ل}}{\text{ل}'}$ لا تختلف في التركيب عن الآئلات التي قبلها ويشتمل هذا برهن على أن تركيب كل آئلة يكون حاصلا بمقتضى هذه القاعدة وبناء عليه فهي مطردة .

فاذا اريد حساب آئلات الكسر المتسلسل .

$$\text{س} - \frac{\text{ح}}{\text{ع}} = \frac{(\text{ك ح} - \text{ك ع})\,\text{ص}}{(\text{ز ك س} + \text{ح}')\,\text{ع}} \quad , \quad \text{س} - \frac{\text{ك}}{\text{ل}} = \frac{\text{ح ك}' - \text{ك ع}'}{(\text{ز ك}'\,\text{س} + \text{ع}')\,\text{ل}}$$

وبالتأمل فى هاتين المتساويتين يشاهد أن فرقين $\text{س} - \frac{\text{ح}}{\text{ع}}$ ، $\text{س} - \frac{\text{ك}}{\text{ل}}$ متخالفان فى العلامة فان كان س أكبر من $\frac{\text{ح}}{\text{ع}}$ كان أصغر من $\frac{\text{ك}}{\text{ل}}$ وان كان س أصغر من $\frac{\text{ح}}{\text{ع}}$ كان أكبر من $\frac{\text{ك}}{\text{ل}}$ وحيث أن الآئلة الأولى $\frac{\text{ح}}{\text{١}}$ أصغر من س فتكون كل من الآئلات ذات المرتبة الفردية أصغر من مقدار الكسر المتسلسل وكل من الآئلات ذات المرتبة الزوجية أكبر منه

بند ١١٩ المقدار المطلق للفرق $\text{س} - \frac{\text{ك}}{\text{ل}}$ أقل من المقدار المطلق للفرق $\text{س} - \frac{\text{ح}}{\text{ع}}$ لأن ص أكبر من الواحد ، ل أكبر من ع وحينئذ تكون كل آئلة أقرب الى مقدار الكسر المتسلسل من الآئلة التى قبلها ولذا سميت الآئلات بالكسور المقربة وينتج من ذلك أن الآئلات ذات المرتبة الفردية يتكون منها متسلسلة تصاعدية وذات المرتبة الزوجية متسلسلة تنازلية

بند ١٢٠ الفرق بين آئلتين متواليتين يساوى كسرا اعتياديا بسطه الواحد ومقامه حاصل ضرب مقام هاتين الآئلتين لانه اذا فرضت الآئلتان $\frac{\text{ح}}{\text{١}}$ ، $\frac{\text{ح د} + \text{١}}{\text{د}}$ كان الفرق بينهما مساويا $\frac{\text{١}}{\text{د}}$ أعنى $\frac{\text{ح د} + \text{١}}{\text{د}} - \frac{\text{ح}}{\text{١}} = \frac{\text{١}}{\text{د}}$ ونتبع هذا برهن على باقى الفروق

ويمكن تعميم برهنة على ذلك أيضا بأن يقال اذا كانت هذه القاعدة موافقة لآئلتين متواليتين من أى مرتبة كالآئلتين $\frac{\text{ح}}{\text{ع}}$ ، $\frac{\text{ك}}{\text{ل}}$ كانت كذلك

يدرالآئلة الاولى

بند ١١٨ مقدار الكسر المتسلسل يكون محصورا دائما بين آئلتين متواليتين ولذا نفرض الكسر المتسلسل الحرفى

$$\text{جـ} + \cfrac{1}{\text{د} + \cfrac{1}{\text{هـ} + \cfrac{1}{\text{و} + \dots}}}$$

ثم نرمز للمقدار الحقيقى بالرمز س فيشاهد أن الآئلة الاولى $\frac{\text{جـ}}{1}$ تكون اصغر من المقدار س حيث حذف الجزء الموجب $\frac{1}{\text{د} + \dots}$ من مقدار س ويشاهد ايضا أن الآئلة الثانية $\text{جـ} + \frac{1}{\text{د}}$ تكون اكبر من س حيث انه قطع النظر فيها عن جزء من المقام $\text{د} + \frac{1}{\text{هـ} + \dots}$ وبمثل هذا يبرهن على باقى الآئلات الآتية

ويمكن البرهنة بوجه عام على منطوق هذه الخاصية بان يقال لاستخراج مقدار س من مقدار $\frac{\text{ك}''}{\text{ل}''}$ المساوى $\frac{\text{ك}'\,\text{ن}'' + \text{ح}}{\text{ل}'\,\text{ن}'' + \text{ع}}$ يغير فيه الرمز ن'' بالمقدار $\text{ن}'' + \frac{1}{\text{ل}'' + \dots}$ الذى هو موجب دائما واكبر من الواحد فيحصل بعد جعل ص رمزا للكمية $\text{ن}'' + \frac{1}{\text{ل}'' + \dots}$

$$\text{س} = \frac{\text{ك}'\,\text{ص} + \text{ح}}{\text{ل}'\,\text{ص} + \text{ع}} \quad \dots\dots (1)$$

واذا طرحت الآئلتان $\frac{\text{ح}}{\text{ع}}$, $\frac{\text{ك}'}{\text{ل}'}$ احداهما بعد الاخرى من كل من طرفى معادلة (١) حدث

$\frac{1}{\text{ك}'(\text{ك}'+\text{ع}')}$ ويكون الخطأ الحاصل أقل من هذا الكسر وحيث أن

$\frac{1}{\text{ك}'(\text{ك}'+\text{ع}')} < \frac{1}{\text{ك}'^{2}}$ فلا مانع من جعل الكسر $\frac{1}{\text{ك}'^{2}}$ نهاية للخطأ وهذه

النهاية تؤثر على غيرها لكونها بسيطة

بند ١٢٣ يكفي بجعل الآئلة $\frac{\text{ل}'}{\text{ك}'}$ مختلفة عن مقدار كسر متسلسل بكمية دون

الكسر المعلوم $\frac{\text{م}}{\text{ح}}$ أن يكون $\frac{1}{\text{ك}'^{2}} < \frac{\text{م}}{\text{ح}}$ فيحدث

$\text{ك}' > \sqrt{\frac{\text{ح}}{\text{م}}}$ أو في النهاية $\text{ك}' = \sqrt{\frac{\text{ح}}{\text{م}}}$

وينتج من ذلك أنه يمكن دائماً ايجاد المقدار الحقيقي أو المقربي لكمية مبينة بكسر

متسلسل لانه ان كان الكسر المتسلسل منتهياً امكن بيان مقداره بكسر اعتيادي

وان كان غير منته امكن الوصول الى مقدار مقرب بجعل مقام الآئلة كسراً

بقدر ما يراد لكون مقامات الآئلات صحيحة لا تزال آخذة في الازدياد

بند ١٢٤ كل كسر متسلسل دائر يدل على احد جذري معادلة ذات درجة ثانية

مكررات حدودها منطقة

وللبرهنة على ذلك بوجه عام نفرض كسراً متسلسلاً مركباً من جزء غير

دائر كسوره المكملة $\frac{1}{\text{ح}}$ و $\frac{1}{\text{ء}}$ …… و $\frac{1}{\text{ع}'}$ و $\frac{1}{\text{ح}'}$ ومن جزء دائر كسوره

المكملة $\frac{1}{\text{م}}$ و $\frac{1}{\text{ح}}$ …… و $\frac{1}{\text{ر}'}$ و $\frac{1}{\text{ل}'}$ ثم نجعل ص رمزاً للجزء الدائر

فيكون

موافقة للأثلتين المتواليتين $\frac{\text{ك}'}{\text{ر}'}$ ، $\frac{\text{ك}}{\text{ر}}$ وحيث تقدم أن

$\frac{\text{ك}}{\text{ر}} = \frac{\text{ك}'\,\text{ر}'' + \text{ع}}{\text{ر}'\,\text{ر}'' + \text{ع}'}$ فيكون

$$\frac{\text{ك}}{\text{ر}} - \frac{\text{ك}'}{\text{ر}'} = \frac{\text{ك}'\,\text{ر}'' + \text{ع}}{\text{ر}'\,\text{ر}'' + \text{ع}'} - \frac{\text{ك}'}{\text{ر}'} = \frac{\text{ع}\,\text{ر}' - \text{ع}'\,\text{ك}'}{\text{ر}'(\text{ر}'\,\text{ر}'' + \text{ع}')}$$

ويؤخذ من الفرض $\frac{\text{ك}'}{\text{ر}'} - \frac{\text{ع}}{\text{ع}'} = \pm \frac{1}{\text{ر}'\,\text{ع}'}$ أعني $\text{ك}'\,\text{ع}' - \text{ع}\,\text{ر}' = \pm 1$ وبناء

عليه يكون $\frac{\text{ك}}{\text{ر}} - \frac{\text{ك}'}{\text{ر}'} = \mp \frac{1}{\text{ر}\,\text{ر}'}$ أعني $\text{ر}'\,\text{ك} - \text{ك}'\,\text{ر} = \mp 1$

بند ١٢١ الأثلات المركبة بمقتضى (بند ١١٧) هي كسور لا تقبل الاختصار لأنه لو كانت إحدى الأثلة $\frac{\text{ع}}{\text{ع}'}$ مضروب مشترك لكان يقسم كلا من طرفي المتساوية $\text{ع}\,\text{ك}' - \text{ع}'\,\text{ك} = \pm 1$ ويكون بمقتضى ذلك قاسما للواحد وهذا خلاف

بند ١٢٢ وحيث تقدم أن مقدار الكسر المتسلسل محصور بين أي أثلتين متواليتين كالأثلتين $\frac{\text{ك}'}{\text{ر}'}$ ، $\frac{\text{ك}}{\text{ر}}$ مثلا فيكون الفرق بين هذا المقدار والأثلة $\frac{\text{ك}'}{\text{ر}'}$ دون الفرق بين الأثلتين $\frac{\text{ك}'}{\text{ر}'}$ ، $\frac{\text{ك}}{\text{ر}}$ وقد شوهد أن الفرق الأخير يساوي المقدار $\frac{1}{\text{ر}\,\text{ر}'}$ فيكون الخطأ الحاصل في أخذ أثلة بدل المقدار التقريبي للكسر المتسلسل دون المقدار $\frac{1}{\text{ر}\,\text{ر}'}$ أي دون الواحد مقسوما على حاصل ضرب مقام هذه الأثلة في مقام التالية لها

ويمكن إيجاد نهاية الخطأ بغير دالة مقام الأثلة التالية للمفروضة لأنه يتحصل بمقتضى ما تقدم $\text{ر} = \text{ر}'\,\text{ر}'' + \text{ع}'$ وحيث أن خارج القسمة $\text{ر}''$ غير التام لا يكون دون الواحد أبدا فلا يزيد الكسر $\frac{1}{\text{ر}\,\text{ر}'}$ في النهاية عن $\frac{1}{\text{ر}'^{2}}$

بالضبط فينبغي ان يفهم الرقم الذي به يحدث التحديد بالتقريب الحاصل بينهما

المقدار الحقيقي للكمية غير الجذرية ... معروفة بالتقريب لعلى كونها بين

النهايتين معاً ولا يوجد في الكسرين المسلسلين غير الخوارج المتحدة في الحالتين

مثلاً اذا اريد بيان النسبة ط تقريباً نجعل مقدار الحقيقي لهذه النسبة

محصوراً بين مقدارين اعشاريين محسوبين بالنسبة لخمسة ارقام عشارية

كالمقدارين ٣٫١٤١٥٩ و ٣٫١٤١٦٠ ثم نحول هذين المقدارين

الى كسرين مسلسلين فتكون الخوارج غير التامة للكسر الاول ٣ و ٧ و ١٥ و ...

وللثاني ٣ و ٧ و ١٦ وينتج من ذلك ان الخارجين الاولين غير التامين

لمقدار ط المحول لكسر مسلسل هما ٣ و ٧ غير انه ان حصل شك في ان

الخارج الثالث غير التام هو ١٥ او ١٦ أخذ مقدار ط بأرقام

أعشارية تزيد في العدد عن المقدرين الاولين ليمتد الكسر المسلسل

عن الكسر المكمل الثاني

في حل غير المعين للمعادلات ذات الدرجة الاولى

في حلول الصحيحة لمعادلة بدرجة اولى كالمعادلة

$$د س + ذ ص = هـ$$

بنيد الغرض الاصلي من الحل غير المعين للمعادلات ذات الدرجة الاولى هو البحث

$$\text{ص} = \text{م} + \cfrac{1}{\text{ح} + \cdots + \cfrac{1}{\text{ر}'' + \cfrac{1}{\text{ل}'' + \cfrac{1}{\text{ص}}}}} \qquad \text{س} = \text{ه} + \cfrac{1}{\text{ء} + \cdots + \cfrac{1}{\text{ك}'' + \cfrac{1}{\text{ع}'' + \cfrac{1}{\text{ص}}}}}$$

واذا جعل $\frac{\text{ح}}{\text{ر}}$ و $\frac{\text{ل}}{\text{ل}}$ رمزين للآثلتين المطابقين للكسرين المكملين

$\frac{1}{\text{ر}'}$ و $\frac{1}{\text{ل}'}$ فى مقدار ص ، $\frac{\text{ك}}{\text{ك}'}$ و $\frac{\text{ع}}{\text{ع}'}$ رمزين للآثلتين المطابقتين

للكسرين المكملين $\frac{1}{\text{ك}''}$ ، $\frac{1}{\text{ع}''}$ فى مقدار س تحصل

$$\text{ص} = \frac{\text{ل ص} + \text{ر}}{\text{ل}'\text{ص} + \text{ر}'} \quad \text{و} \quad \text{س} = \frac{\text{ع ص} + \text{ك}}{\text{ع}'\text{ص} + \text{ك}'}$$

وبحذف ص من هاتين المعادلتين يتوصل الى معادلة ذات درجة ثانية

محتوية على س الذى هو مقدار الكسر المتسلسل المفروض

ويلزم لمزيد الاختصار أن تحل بدل المعادلة ذات الدرجة الثانية الناتجة عن

حذف ص التى يستخرج منها المجهول س مقدار ان المعادلة

$$\text{ص} = \frac{\text{ل ص} + \text{ر}}{\text{ل}'\text{ص} + \text{ر}'} \quad \text{أو} \quad \text{ل}'\text{ص}^2 + (\text{ر}' - \text{ل})\text{ص} - \text{ر} = 0$$

وحيث أن الحد الأخير من هذه المعادلة سالب فيكون أحد الجذرين سالبًا

ولا يؤخذ غير الموجب وبواسطة مقدار ص الموجب يسهل تعيين المقدار

الموافق للمجهول س

١٤٥ تنبيه يلزم فى بعض الأحيان تحويل كمية غير جذرية مبينة بكسر اعشارى

الى كسر متسلسل وحيث أن المقدار الاعشارى لا يمكن أخذه فى هذه الحالة

بالضبط

فهي غير متحققة وينتج من ذلك أنه اذا كان مكررا ح ، ء غير اولين معا لايكون للمعادلة حل صحيح

١٢٨ ومتى كان مكررا ح ، ء اولين معا كان للمعادلة حس + ءص = هـ حلول صحيحة لانه اذا فرضنا الكميات ح ، ء ، هـ موجبة وحلت المعادلة المذكورة بالنسبة للمجهول س تحصل

$$س = \frac{هـ - ءص}{ح}$$

فاذا رمز بالرمز ع لعدد ما بحيث يكون هـ = حع - هـَ
(هـَ هو كناية عن عدد موجب) واستعوض هـ بمقداره في مقدار
س حدث

$$س = ع - \frac{هـَ + ءص}{ح}$$

واذا فرضنا أن المجهول ص اخذ بالتوالي كلا من المقادير
١، ٢، ٣، ... ح - ١ كانت البواقي الحادثة من قسمة هـَ + ءص على ح
غير متساوية وكل واحد منها اصغر من ح لانه لو حصل للمجهول ص مقداران
مختلفان كل منهما أصغر من ح كالمقدارين م ، مَ وبهما توصل
الى باقيين متساويين لكان

$$هـَ + ءم = حك + ر \quad ، \quad هـَ + ءمَ = حكَ + ر$$ ومنهما يحدث

$$ء(م - مَ) = ح(ك - كَ)$$

عن حلول المسائل ذات الدرجة الاولى التي منطوقها غير كاف حتى يكون عدد
المعادلات مبين عدد المجاهيل عند ما يفرض لهذه المجاهيل اعداد صحيحه
موجبة أو سالبة أو موجبة فقط والمراد بالحلول الصحيحه الحلول التي تكون
بها مقادير المجاهيل اعداد صحيحة

بند ١٢٧ ولذا نفرض المعادلة العمومية ح س + ء ص = هـ ذات الدرجة الاولى
والمجهولين التي فيها ح ، ء ، هـ رموزا لاعداد صحيحه موجبة أو سالبة
فيمكن دائما أن لا يكون لهذه الاعداد مضروب مشترك لانه ان كان
لها مضروب مشترك امكن حذفه وحولت المعادلة المفروضه الى معادلة
اخرى متحدة معها في الصورة الا انها اخصر منها فاذا تقرر هذا شوهد من
أول وهلة انه اذا كان مكررا ح ، ء غير أوليين معا لا يكون للمعادلة المفروضة
حل صحيح لانه ان كان لهما مضروب مشترك كالمضروب م تحصل
ح = حَ م ، ء = م ءَ (بفرض حَ ، ءَ عددين صحيحين) فاذا وضع
بدل ح ، ء مقدارها في المعادلة المتقدمة وقسم كل من طرفيها على
المضروب م تحصل

حَ س + ءَ ص = هـ/م

فاذا فرض للمجهولين س ، ص مقادير صحيحة كما هو المطلوب كان الطرف
الاول من هذه المعادلة صحيحا وحيث أن طرفها هـ/م الثاني كمية كسرية

فهي

ثم يحول الكسر $\frac{ح}{ك}$ الى كسر متسلسل ثم يرمز للاوتلة التي قبل الاخيرة بالرمز $\frac{ع}{ك}$ فان كانت مرتبة هذه الاوتلة زوجية حدث

$ح ع - ء ك = ١$ ويضرب كل من طرفيها في ه يحدث

$ح ع ه - ء ك ه = + ه$

وبالمقارنة بين هذه المتساوية والمعادلة $ح س + ء ص = ه$ يتأكد

أن هذه المعادلة تتحقق بجعل المجهول $س = ع ه$ والمجهول $ص = - ك ه$

وان كانت مرتبة الاوتلة $\frac{ع}{ك}$ فردية تحصل

$ح ع - ء ك = -١$ ومنها يحدث

$- ح ع ه + ء ك ه = + ه$

وبناء على ذلك تتحقق المعادلة $ح س + ء ص = ه$ باخذ ...

$س = - ع ه$ ، $ص = ك ه$

وحينئذ يكون للمعادلة المفروضة حل صحيح

بند ١٤٠ متى علم حل صحيح للمعادلة $ح س + ء ص = ه$ امكن ... ... عدة حلول

لانه اذا فرض أن $س = ح'$ ، $ص = ء'$ هو الحل المعلوم كان

$ح ح' + ء ء' = ه$ وبطرح هذه المتساوية من المعادلة $ح س + ء ص = ه$

يتحصل

وهذه المعادلة يؤخذ منها

$$\frac{د(م-ت)}{ح} = ك - ك'$$

وحيث أن الطرف الثاني عدد صحيح فيكون الطرف الاول كذلك وبناءً على ذلك يكون د(م-ت) قابلاً للقسمة على ح وهذا محال لان د اوليّ مع ح وكل من م ، ت اصغر من ح ومن هنا يعلم أن احد البواقي الحادثة من قسمة $\frac{هـ+دص}{ح}$ على ح يكون صفراً وعليه فيكون المجهول ص مقدار صحيح أقل من ح بواسطة يكون المجهول س مقدار صحيح فاذا كانت المعادلة بهذه الصورة

$$حس - دص = هـ$$ فانه يستخرج منها

$$س = \frac{هـ+دص}{ح}$$

ثم يبرهن على الكسر $\frac{هـ+دص}{ح}$ بمثل ما برهن على الكسر المتقدم $\frac{هـ+دص}{ح}$ لكنه يلاحظ انه يمكن استخراج حلول المعادلة $حس - دص = هـ$ من حلول المعادلة $حس + دص = هـ$ وذلك بتغيير علامة المجهول ص ومن هنا يؤخذ أنه متى كان للمعادلة الأخيرة حلول صحيحة كان للاخرى كذلك

١٢٩ ويمكن البرهنة على العقضية المتقدمة في البند السابق بواسطة خواص الكسور المتسلسلة بأن نفرض المعادلة

$$حس + دص = هـ$$

٢٤ س + ٦٥ ص = ٢٤٣

وحول $\frac{٦٥}{٢٤}$ الى كسر متسلسل وتكونت الآيلات المتوالية كان $\frac{١٩}{٧}$ مقدار الآيلة التى قبل الأخيرة وحيث كانت زوجية المرتبة فيكون

٢٤ × ١٩ − ٦٥ × ٧ = + ١ ومن هنا يحدث

٢٤ × ١٩ × ٢٤٣ − ٦٥ × ٧ × ٢٤٣ = ٢٤٣

وحينئذ يشاهد أن المعادلة المفروضة تتحقق بجعل

س = ١٩ × ٢٤٣ = ٤٦١٧ , ص = − ٧ × ٢٤٣ = − ١٧٠١

وبمقتضى ما تقدم فى (بند ١٢٨) تتعين جميع الحلول الصحيحة للمعادلة المفروضة بواسطة القوانين

س = ٤٦١٧ + ٦٥ و , ص = − ١٧٠١ − ٢٤ و

و س = ٤٦١٧ − ٦٥ و , ص = − ١٧٠١ + ٢٤ و

بند ١٣٢ وهناك طريقة اخرى غير مؤسسة على القضايا المتقدمة بواسطتها يتوصل من اول وهلة الى القانونين اللذين منهما تعلم جميع الحلول الصحيحة لمعادلة ذات درجة اولى ومجهولين

فاذا فرضت المعادلة ح س + ء ص = هـ وجعل فيها ح > ء وحلت بالنسبة للمجهول س تحصل

$$س = \frac{هـ - ء ص}{ح}$$

$$ح(س-هـ')=د(ك'-ص)$$

ولتحقق هذه المعادلة بالمقادير الصحيحة للمجهولين س وص يلزم أن يكون د قاسمًا للحاصل ح(س-هـ') وحيث كان د اوليًا مع ح فيكون قاسمًا للكمية (س-هـ') فاذا رمز لخارج القسمة بالرمز و كان س-هـ'=دو (بجعل و كناية عن عدد صحيح موجب اوسالب) واذا استعوض في المعادلة المتقدمة س-هـ' بالمقدار دو حدث ك'-ص=حو وحينئذ يكون

$$س=هـ'+دو \quad ، \quad ص=ك'-حو$$

وأي مقدار موجب أو سالب يفرض لغير المعين و يؤخذ منه للمجهولين س وص مقداران صحيحان ومحققان للمعادلة المفروضة

ويشاهد من القانونين المتقدمين بعد أن يوضع فيهما على التوالي بدل المتغير و واحد المقادير ٠، ١، ٢، ٣ ...... الخ و -١، -٢، -٣، ...... الخ أنه ينتج من مقادير المجهول س متوالية عددية اساسها مكرر ص ومن مقادير المجهول ص متوالية رتبية اساسها مكرر س

١٢١ ويمكن بواسطة ما تقدم أيضًا ايجاد الحلول الصحيحة لمعادلة ذات درجة اولى ومجهولين

مثلًا اذا فرضت المعادلة

ص = ـ ك ك م + م ـ (ـ ك + ب ـ) = م (ك ك + ١) ـ ح ق

ولاستخراج مقدار س بوضع ... ص ...

س = ـ ك ص + و فيحدث

س = ـ م (ك ك ك + ك + ك) + ...

= ـ م (ك ك ك + ك + ك) + ...

وهذا الناتج انه بخلاف تحت القاعدة المتقدمة (نبذه ١٢٩) ويشاهد أيضا ان معكوس م في مقداري المجهولين س ، ص هما احد الاثلة التي تلي الاخيرة الناتجة من الكسر المتسلسل المتكون من الكسر الاعتيادي

وهاك مثالا للتوضيح والتمرين وهو ان يراد حل المعادلة

٢٤ س + ٦٥ ص = ٣٦٢

ثانيا تحل بالنسبة لمجهول متبوع بأصغر معكر كالمجهول س مثلا ثم يستخرج العدد الصحيح الذي يوجد في مقدار هذا المجهول س

س = (٣٦٢ ـ ٦٥ ص) / ٢٤ = ١٥ ـ ٢ ص + (٢ ـ ١٧ ص) / ٢٤

ولكي يكون لمقدار صحيح مفروض للمجهول ص معينا المقدار صحيح للمجهول س يكفي

و ... رمز للخارج الصحيح من قسمة د على هـ بالرمز ك وللباقي بالرمز ے

نحصل د = هـ ك + ے ، س = - ك ص + (هـ - ے ص) / د

ولكي يحدث من المقدار الصحيح المفروض للمجهول ص مقدار صحيح للمجهول

س يلزم أن يكون (هـ - ے ص) / د عدداً صحيحاً اذا رمز له بالرمز و نحصل

(هـ - ے ص) / د = و ، ∴ س = - ك ص + و

واذا استخرج مقدار ص من المعادلة (هـ - ے ص) / د = و وجعل ك′

رمزاً للخارج الصحيح من قسمة د على ے وجعل ے′ رمزاً للباقي تحصل

د = ے ك′ + ے′ ، ص = (هـ - د و) / ے = - ك′ و + (هـ - ے′ و) / ے

وبمثل ما تقدم يتحصل ايضاً

(هـ - ے′ و) / ے = و′ ، ص = - ك′ و + و′

وبتوالي هذا العمل على العددين هـ ، د يشاهد أنه لا يختلف عن العمل

الذي يجري لايجاد القاسم المشترك الأعظم بينهما وحيث أنهما اوليان

معاً فيتوصل الى باقٍ مساوٍ للواحد

فاذا كان هذا الباقي حادثاً من تقسيم ے على ے′ كان

ے = ے′ ك″ + ١ وعليه فيكون و = (هـ - ے و′) / ے′ = - ك″ و′ + (هـ - و′) / ے′

ومن فرض (هـ - و′) / ے′ = و″ يحدث و = - ك″ و′ + و″ ، و′ = هـ - ے′ و″

ولتحصيل مقداري س ، ص بدالة غير المعين و″ يوضع المقدار هـ - ے′ و″

ثم يحدث من معادلة (٩)

$$\text{وَ} = ٣\ \text{وَ}'' \quad \cdots \quad (١٠)$$

وحيث كان مكرر وَ في معادلة (١٠) مساويًا للواحد يمكن أن يعرض لغير المعين وَ'' أي مقدار صحيح موجب أو سالب فيحدث لغير المعين وَ مقدار صحيح أيضًا ثم تحصل مقادير و ، وَ ، س ، ص الصحيحة بواسطة معادلات (٩)،(٧)،(٥)،(٣) وعليه فقد حلت المعادلة المفروضة

وعوضًا عن أن يبحث بالتوالي عن مقادير غير المعينات وَ ، وَ ، و بالنسبة لمقدار وَ'' ليتوصل بذلك إلى مقداري س ، ص يعين مقدارا هذين المجهولين بدلالة غير المعين الأخير وَ'' بأن يوضع ٣ وَ'' بدل وَ في معادلة (٩) فيتحصل

وَ = ١ − ٧ وَ'' فإذا وضع بدل وَ ، وَ مقدارها في المعادلة (٧) آل التالي

و = −٢ + ١٧ وَ''

وإذا وضع بدل و ، وَ مقدارها في المعادلة (٥) حدث

ص = ٣ − ٤١ وَ'' ومثل هذا يتحصل

س = −٢ + ٦٥ وَ''

ومن هذين القانونين تستخرج مقادير س ، ص بأن يوضع فيهما بدل غير المعين وَ'' أي مقدار صحيح موجب أو سالب

والطريقة التي سلكناها هنا يؤخذ منها أنه يكون للمعادلة المفروضة حلول صحيحة

(٢،٣)

وكان $\frac{١-٢ص}{٣}$ عددًا صحيحًا فاذا رمزنا لهذا العدد غير المعين بالرمز و

$\frac{١-٢ص}{٣}$ = و ......(٢) ∴ س = ١٠ - ٢ص + و ....(٣)

وحينئذ فقد آل البحث عن الحلول الصحيحة للمعادلة (١) الى البحث عن الحلول الصحيحة للمعادلة (٢) التي فيها معاملا المجهولين ابسط منهما في الاولى ومن المشاهد انه لا يمكن استنتاج نحو مشابه للمتقدم لأن اذا احللنا المعادلة بالنسبة للمجهول المتبوع بأصغر معامل وحينئذ اذا اجري هذا العمل على المعادلة (٢) نحصل

ص = $\frac{٢-٢٤و}{١٧}$ = - و + $\frac{٢-٧و}{١٧}$

وحينئذ يلزم أن يكون $\frac{٢-٧و}{١٧}$ عددا صحيحا فاذا رمزنا له بالرمز وَ نحصل

$\frac{٢-٧و}{١٧}$ = وَ ......(٤) ∴ ص = - و + وَ ....(٥)

واذًا فقد آل البحث عن الحلول الصحيحة للمعادلة (٢) الى البحث عن الحلول الصحيحة للمعادلة (٤)

وبتوالي العمل على هذا المنوال نحصل

و = $\frac{٢-١٧وَ}{٧}$ = - ٢وَ + $\frac{٢-٣وَ}{٧}$ ∴

$\frac{٢-٣وَ}{٧}$ = وً ......(٦) ∴ و = - ٢وَ + وً ....(٧)

ثم نحصل

وَ = $\frac{٢-٧وً}{٣}$ = ١ - ٢وً - $\frac{وً}{٣}$ ∴

$\frac{وً}{٣}$ = وٌ ....(٨) ∴ وَ = ١ - ٢وً - وٌ ....(٩)

[illegible]

[illegible]

[illegible]

فإذا حسب كل من [illegible] [illegible] لا [illegible]

س = [illegible] ص [illegible] [illegible] [illegible]

ص = [illegible] [illegible] [illegible]

في المعادلة [illegible] أنه يمكن [illegible]

موجبة [illegible]

ويمكن أيضاً [illegible] المعادلات [illegible] [illegible] [illegible]

المقدار [illegible]

ثم [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] ويكون [illegible] [illegible]

أو [illegible] وحيث [illegible] [illegible]

[illegible] قابلاً للقسمة [illegible] [illegible]

ص − ٣ = ٤ ر

ومن هذه المعادلة الأخيرة نجد أن ص = ٣ + ٤ ر وعليه فيكون

س = ١١ − ٣ ص + ٧ ر = ٢ − ١٥ ر

[illegible] تصويبها او بين معادلة [illegible] بتوصلها الى اجراء عمل على كل [illegible] الأبسط [illegible]

[illegible] مشترك الأعظم

وما مكررات نسب المعينات في المعادلات المتوالية الناتجة من العمل فهي البواقي المتوالية الحادثة من هذه العملية وحيث كان أحد هذه البواقي مساوياً بالضرورة للواحد فيكون البحث [illegible] ارتباطه بالبحث عن الحلول الصحيحة للمعادلة الأخيرة التي يكون فيها مكرر غير المعين الذي قبل الأخير مساوياً للواحد بمعنى أنه يكفي لتحصيل [illegible] غير المعين المذكور أن يفرض لغير المعين الاخير مقدار صحيح [illegible] من حسابات قابل للاختصار

ولنفرض المعادلة $٢٤ س + ٦٥ ص = ٢٤٣$

فيستخرج منها $س = \frac{٢٤٣ - ٦٥ ص}{٢٤}$

ثم يوضع بدل العدد [illegible] الذي هو الجزء الصحيح من خارج قسمة ٦٥ على ٢٤ [illegible] باقياً ١٧ الخارج الصحيح ٣ فيكون الباقي − ٧ وبناء عليه يكون

$$س = ١٠ - ٣ ص + \frac{٣ + ٧ ص}{٢٤}$$

فاذا فرض أن $\frac{٣ + ٧ ص}{٢٤} = و$ نحصل

$$ص = \frac{٢٤ و - ٣}{٧} = ٣ و + \frac{٣ و - ٣}{٧}$$

ولكي يكون مقدار ص صحيحاً يلزم أن يكون المقدار $\frac{٣ و - ٣}{٧}$ صحيحاً وحيث أنه يمكن وضع المقدار $\frac{٣ و - ٣}{٧}$ بالصورة $\frac{٣ (و - ١)}{٧}$ وأن العددين ٣، ٧ أوليان معاً

بند ١٣٦ القانونان الناتجان من حل المعادلة ٢٤ س + ٦٥ ص = ٢٤٣ المذكوران (في بندى ١٣٠ و ١٣١) اللذان يختلفان في الصورة عن القانونين المستخرجين من المعادلة المذكورة المتقدمين (في بندى ١٣١ و ١٣٢) يكونان متكافئين لانه اذا اخذ القانونان

س = ٤٦١٧ − ٦٥ و ، ص = − ١٧٠١ + ٢٤ و

المتقدمان (في بند ١٣١) وقسم العدد ٤٦١٧ على ٦٥ والعدد ١٧٠١ على ٢٤ تحصل

٤٦١٧ = ٧١ × ٦٥ + ٢ ، ١٧٠١ = ٧١ × ٢٤ − ٣ وعليه فيكون

س = ٢ + ٦٥ (٧١ − و) ، ص = ٣ − ٢٤ (٧١ − و)

واذا فرض أن ٧١ − و = وَ تحصل

س = ٢ + ٦٥ وَ ، ص = ٣ − ٢٤ وَ

بند ١٣٧ ومن المعلوم أننا لم نتكلم الى هنا الا على طريقة تعيين الحلول الصحيحة موجبة كانت أو سالبة ولنتصدى الآن لاختبار الحالة التي يراد فيها تعيين الحلول الصحيحة الموجبة فقط فنقول

أنه يمكن في المعادلة العمومية ا س + ب ص = هـ أن نجعل هـ يكون موجبا لانه ان كان سالبا أمكن تحويله الى موجب بتغيير علامات طرفي المعادلة المذكورة وحينئذ لا تخرج جميع الحالات المبينة بعلامات ا و ب عن المعادلات الاربع الآتية

بند ٥٢ وحيث كان للكمية المعلومة هـ فى المعادلة د س + ذ ص = هـ مع أحد مكررى المجهولين مضروب مشترك هو م مساوٍ وهلة تحويل هذه المعادلة الى أخرى ابسط منها لانه اذا فرض أن د = دَ م ، هـ = هَ م (بجعل دَ ، ذَ دالين على عدد صحيح) آلت المعادلة المفروضة الى أخرى هى

دَ س + ذ ص / م = هَ

ولكى تكون حلول هذه المعادلة صحيحة يلزم أن يكون ذ ص قابلاً للقسمة على م وحيث أن ذ اولى مع م فيكون ص قابلاً للقسمة على م فاذا رمز لهذا الخارج بالرمز ع نحصل ص = م ع وبناءً عليه يكون

دَ س + ذ ع = هَ

ويمكن استعمال هذا الاختصار فى المعادلة ٢٤ س + ٦٥ ص = ٢٤٣ المتقدمة حيث أن كلاً من مكرر المجهول س الذى هو ٢٤ والكمية المعلومة ٢٤٣ يقبل القسمة على ٣ وبناءً على ذلك اذا فرض أن ص = ٣ ع آلت المعادلة المتقدمة الى

٨ س + ٦٥ ع = ٨١ ومنها يحدث

س = (٨١ − ٦٥ ع) / ٨ = ١٠ − ٨ ع + (١ − ع) / ٨

وينتج من (١ − ع) / ٨ = و أن ع = ١ − ٨ و فاذا ابدل ع بمقداره فى المعادلة المذكورة وفى معادلة ص = ٣ ع نحصل

س = ٢ + ٦٥ و ، ص = ٣ − ٢٤ و

محققة بمقادير صحيحة موجبة وليلاحظ أن المتباينتين و > − حَ/دَ

، و < دَ/حـَ لا تكونان متخالفتين لأنه لما كان حـ دَ + د دَ = هـ وكانت

كمية هـ موجبة بالفرض كان حـ دَ + د دَ > ٠ ومن هنا يحدث

د دَ > − حـ دَ أو دَ/حـ > − حَ/د

فإذا جعل حـ١ رمزاً لعدد صحيح موجب أو سالب أصغر من − حَ/دَ و هـ١ رمزاً

لعدد صحيح أكبر من دَ/حـ كانت مقادير و المحصورة بين − حَ/دَ ، دَ/حـ

مبينة بالاعداد

حـ١ + ١ ، حـ١ + ٢ ، حـ١ + ٣ ، ..... ، هـ١

وحيث أن الفرق بين الكسرين دَ/حـ ، − حَ/دَ هو (د دَ + حـ حَ)/(د حـ) أى هـ/(د حـ) فيكون

الفرق هـ١ − حـ١ مساويًا ك أو ك + ١ بجعل ك رمزاً للجزء الصحيح من

خارج قسمة هـ على د حـ وحينئذ يكون عدد الحلول الصحيحة للمعادلة المفروضة

مساويًا ك أو ك + ١

فإذا فرضت الآن المعادلة حـ س − د ص = هـ نشاهد أنها لا تختلف عن المعادلة

الأولى إلا بتغيير علامة المجهول ص وباعتبار هذا التغيير فى المقدارين المتقدمين

يتحصل س = دَ + د و ، ص = − دَ + حـ و

$ \ldots = هـ $

$ \ldots = هـ \quad (١) $

$ \ldots = \ldots \quad (٢) $

$ \ldots - \ldots \; و ص = هـ \quad (٣) $

بحيث د ، ر ، هـ ، ك ، ع كميات موجبة

وأما المعادلة الثالثة فلا تختلف في شيء عن الثانية وأما الرابعة فليس لها

حلول موجبة يمكن تعيينها من المعادلتين الأوليين

وقد شوهد فيما تقدم أنه إذا فرض د ، ر حلًا للمعادلة د س + و ص = هـ

تحصلت جميع الحلول الصحيحة بواسطة القانونين

$$ س = حَ + د ر \quad ، \quad ص = ءَ - حـ ر $$

ولكي يكون كل من مقداري س ، ص موجبًا يلزم أن يكون

$$ حَ + د ر > ٠ \quad ، \quad ءَ - حـ ر > ٠ $$ ومنهما يحدث

$$ ر > - \frac{حَ}{د} \quad ، \quad ر < \frac{ءَ}{حـ} $$

ولا ينبغي أن يفرض لمقدار ر إلا المقادير الصحيحة الموجبة أو السالبة

المحصورة بين النهايتين $- \frac{حَ}{د}$ ، $\frac{ءَ}{حـ}$ وحينئذ يكون عدد الحلول

الصحيحة منتهيًا وذلك يشاهد بسهولة من المعادلة المفروضة لأنه إن لم

يتحصل عدد صحيح محصور بين النهايتين $- \frac{حَ}{د}$ ، $\frac{ءَ}{حـ}$ كانت المعادلة غير

محققة

في المعادلة (١) مقدار س، ص بدالة [illegible] و نعوض في معادلة بالدورة

ح و + هـ ع = ك فإن كان لهذه المعادلة حلول صحيحة ثابت حسبنا بقانون

محتويين على ع ، و بدالة غير المعين وَ واذا أبدل وَ المعين له [illegible]

بمقداره في مقداري س، ص المستخرجين من معادلة (٢) [illegible]

المجاهيل الثلاثة بدالة غير المعين الصحيح وَ

فاذا كان معكرك هـ، هـَ أوليين معًا فانه يكفي أن يكون للمعادلة (٣) حلول

صحيحة حتى يكون للمعادلتين (١)، (٢) حلول صحيحة أيضا وحينئذ فكل مقدارين

من مقادير س، ص صحيحين ومحققين للمعادلة (٣) يحصل بواسطتهما من

المعادلة (١) مقدار صحيح للمجهول ع لانه اذا فرض أن س = ح، ص = ك

هو الحل الصحيح للمعادلة (٣) تحصلت المتساوية

(حهـَ - هـ حَ) ح + (دهـَ - هـ دَ) ك = م هـَ - هـ مَ ومنها يحدث

هـَ (م - ح ح - د ك) = هـ (مَ - حَ ح - دَ ك)

وحيث فرض أن هـ، هـَ أوليان معا فيكون هـ قاسما لكمية م - ح ح - د ك

ونجعل ر رمزا لخارج القسمة يحصل

ح ح + د ك + هـ ر = م

(٢٢١)

ولكي يكون مقدارا س ، ص موجبين يلزم أن يكون و > − ح/د ، و > حَ/دَ .

وحينئذ يوجد لغير المعين و مقادير عددها لا نهائي تكون محققة للمتباينتين المفروضتين لانه يكفي لتحقق كلتا المتباينتين أن يكون و أكبر من أعظم الكميتين − ح/د ، حَ/دَ . وبناء على ذلك تحصل حلول صحيحة موجبة غير منتهية العدد

في الحلول الصحيحة لعدة معادلات ذات درجة أولى محتوية على مجاهيل عددها يزيد عن عدد المعادلات المذكورة

١٣٨ إذا فرضت المعادلتان العدديتان

ح س + د ص + هـ ع = م .... (١)

و حَ س + دَ ص + هـَ ع = مَ .... (٢)

وحذف من بينهما أحد المجاهيل وليكن ع مثلاً فانه يحصل

(هـ حَ − هـَ ح) س + (د هـَ − هـ دَ) ص = م هـَ − هـ مَ .... (٣)

وحينئذ فقد أبدلت معادلتا (١) و (٢) بمعادلتي (١) و (٣) فان كان للمعادلة (٣) حلول صحيحة استنتج منها مقدارا س ، ص بدالة غير معين وليكن و وعليه فتؤول المسألة الى تعيين المقادير الصحيحة لغير المعين و بحيث اذا وضع مقدارا س ، ص في المعادلة (١) تحصل مقدار صحيح للمجهول ع لانه اذا وضع

في المعادلة

٣٩ س + ٣٤ ص = ٧٧٤٦

وحينئذٍ فقد آلت جملة المعادلات المفروضة الى المعادلات الثلاث

١٣ س + ٥ ص − ٥ ع + ٩ ط = ٢٠٠٩ ع

٩٧ س + ٥٣ ص + ٥ ع = ١٩١٧٥ ع

٣٩ س + ٣٤ ص = ٧٧٤٦

ثم يبحث عن القانونين اللذين تعلم بواسطتهما الحلول الصحيحة للمعادلة ذات المجهولين ٣٩ س + ٣٤ ص = ٧٧٤٦ وحيث أن مكرر س يقبل القسمة على المضروب ٢ الذي يقسم العدد ٧٧٤٦ وأن مكرر ص يقبل القسمة على المضروب ٣ الذي يقسم العدد ٧٧٤٦ فيمكن اختصار الحساب بفرض س = ٢ سَ , ص = ٣ صَ وحينئذٍ تؤول المعادلة المفروضة الى

١٣ سَ + ١٧ صَ = ١٢٩١

واذا حلت هذه المعادلة بمقتضى ما تقدم فانه يتوصل الى

صَ = ١ + ١٣ و , سَ = ٩٨ − ١٧ و وعليه فيكون

ص = ٣ + ٣٩ و , س = ١٩٦ − ٣٤ و

وحينئذٍ تكون المعادلة (١) متحققة بالمقادير

س = ع ، ص = ك ، ع = ر

وينتج من ذلك انه متى كان مكررا هـ ، هـَ اوليين معًا استخرج من معادلة (٣) مقدارا س ، ص بدالة غير المعين و ثم يوضع هذان المقداران في معادلة (١) فتؤول المعادلة ليستخرج منها مقدار المجهول ع بدالة غير المعين و

بند ٢٩ ولمزيد التوضيح والتمرين على ذلك نفرض المعادلات الثلاث الرقمية وهي

١٢س + ٥ص − ٤ع + ٤ط = ٥٥٩ ،

٨س + ٧ص + ٣ع − ٥ط = ١٥٩٥ ن

١١س − ٣ص + ٥ع − ٧ط = ١٥٧؛ ن

ثم يحذف المجهول ط من بين المعادلة الاولى وكلتا المعادلتين الاخريين فتحصل المعادلتان

٩٧س + ٥٢ص + ٢ع = ١٩١٧٥ ن

١٢٥س + ٤٢ص + ٦ع = ٦٥٤١ ،

وبحذف المجهول ع من بين هاتين المعادلتين يحصل

فاذا كان لا يطلب غير الحلول الصحيحة الموجبة [illegible]

[illegible] $\frac{١٩٦}{٦٢}$ عوضاً عن $\frac{١٥}{١٧}$ وجب [illegible]

اذا فرضنا أن
ق = ٠ [illegible] س = ١٩٦ ، ص = ٣ ، ع = [illegible] ، ط = [illegible]
ق = ١ نحصل س = ١٢٨ ، ص = ٨١ ، ع = ١٢٢ ، ط = ٢٢٥
ق = ٢ س = ٦٠ ، ص = ١٥٩ ، ع = ٢٦٦ ، ط = ١٧٤

بند ولنتصدى الآن لذكر الحالة التي يراد فيها تعيين الحلول الصحيحة لمعادلة مشتملة على مجاهيل عددها يزيد عن اثنين فنقول

اذا فرضت المعادلة د س + ذ ص + هـ ع = ج شوهد انه اذا كان لمكررات د ، ذ ، هـ مضروب مشترك لا يقسم الكمية المعلومة ج كانت المعادلة غير متحققة بمقادير س ، ص ، ع الصحيحة وعليه فلا يلزم بعد الاختصار أن يكون للمكررات د ، ذ ، هـ مضروب مشترك

واذا كان مكررا د ، ذ اوليين معاً أمكن أن يعين للمجهول [illegible] مقدار به يحدث لكل من المجهولين س ، ص عدة غير متناهية من مقادير [illegible]

ولتحصيل القانونين اللذين بواسطتهما تعلم [illegible]
المطابقة لكل مقدار يعرض للمجهول ع توضع المعادلة [illegible]

واذا وضع في المعادلة ٩٧ س + ٥٣ ص + ٢ ع = ١٩١٧٥ بدل

مجهولين س , ص مقداراهما المعينان بدالة غير المعين و نحصل

٢ و - ١٢٣١ ع = - ٤

ومن هذه المعادلة يستنتج مقدارا ع , و بدالة غير معين آخر وَ

وحينئذ نحصل و = ٢ وَ ع = ١٢٣١ وَ + ٢

ثم يوضع بدل و مقداره ٢ وَ في مقداري س , ص السابقين فيؤول الى

ص = ٢ + ٧٨ وَ , س = ١٩٦ - ٦٨ وَ

ثم توضع بدل س , ص , ع المعينة بدالة غير المعين وَ مقاديرها في المعادلة

٣ س + ٥ ص - ٢ ع + ٤ ط = ٥٥٩ فنحصل

٧٣٩ و - ط = ومنها يجدث

ط = ٧٣٩ وَ

وحيث كان مقدار ط المعين بدالة وَ صحيحاً فيكون الحساب منتهياً

وبالجملة فتتعين الحلول الصحيحة لجملة المعادلات المفروضة بواسطة القوانين

س = ١٩٦ - ٦٨ وَ , ص = ٢ + ٧٨ وَ

ع = ٢ + ١٢٣١ وَ , ط = ٧٣٩ وَ

٨٣

... س + ق ...

... س ص ... بين ...

وحيث ان ... كل ... ...

د ، ر ، ه عدد اولية معا فيتوصل بمعادلة ه ح + ك و = ق او مقد ...

ح ، و بدلالة غير المعين الصحيح ق ثم يوضع بدل و مقداره في مقداري

س ، ص المتقدمين فيحصل مقدارهما بدلالة غير المعين ق .

مثلاً اذا فرض انه اريد حل المعادلة

١٥ س + ٩ ص + ٢٠ ع = ١٧١ توضع هكذا

٥ س + ٣ ص = (١٧١ − ٢٠ ع) / ٣

وبفرض (١٧١ − ٢٠ ع) / ٣ = ر يحصل

٥ س + ٣ ص = ر ومنها يستخرج

س = ر − ٣ ل ، ص = ٥ ل − ٢ ر ويتوصل بالمعادلة

(١٧١ − ٢٠ ع) / ٣ = ر

ر = ٥٧ − ٢٠ ق ، ع = ٣ ق

فاذا ابدل ر بالمقدار ٥٧ − ٢٠ ق في مقداري س ، ص المتقدمين يحصل

$$ح س + ء ص = ع - ه ع$$

ثم يفرض لمزيد الاختصار أن ع - ه ع = م فيحصل

$$ح س + ء ص = م$$

ثم يستخرج من هذه المعادلة مقدارا س ص بالنسبة لكل من م وغير المعين و فاذا ابدل م بالمقدار ع - ه ع تحصل مقدارا س ص بالنسبة لكل من ع وغير المعين و

وتختصر هذه الكيفية متى وجد بين المكونات الثلاثة ح , ء , ه اثنان غير أوليين معا مثلا اذا فرض أن ح = حَ ك , ء = ءَ ك آلت المعادلة المفروضة الى

$$حَ س + ءَ ص = \frac{ع - ه ع}{ك}$$

ولكي يكون مقدارا س ص صحيحين يلزم أن يكون ع - ه ع قابلا للقسمة على ك فاذا رمز لخارج القسمة بالرمز و تحصل

$$\frac{ع - ه ع}{ك} = و$$ ومنها يحدث

$$ه ع + ك و = ع$$

وعليه فتؤول المعادلة المتقدمة الى

حَ س

وإذا كان ... [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

س مثلاً فيكون س = [illegible]

فعدد المجهول س عدد مركب [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

ولمزيد توضيح على ذلك نورد المسائل الآتية فنقول

مسألة أولى

إذا كان المراد تقسيم العدد ١٠٠ إلى جزئين بحيث يكون أحدهما قابلاً للقسمة

على ٧ والثاني على

فبما عرفت يمكنك أن تجد أن الأول هو ٥٦ والثاني ٤٤

س = ٥٧ - ٢٠ وَ - ٢ل ، ص = ٥ل + ٤٠ وَ - ١١٤

أو ... فالقوانين التي بواسطتها تتعين الحلول الصحيحة للمعادلة المفروضة هي

س = ٥٧ - ٢٠ وَ - ٢ل ، ص = ٥ل + ٤٠ وَ - ١١٤ ، ع = ٣ وَ

التي يفرض فيها لكل من غير المعينين وَ، ل جميع ما يراد من الأعداد الصحيحة

ولكي يكون مقدار ع الصحيح موجبا يلزم أن تفرض لغير المعين وَ مقادير

موجبة ويلزم أيضا لجعل مقداري س، ص موجبين أن يكون

ل < (٥٧ - ٢٠ وَ)/٢ ، ل > (١١٤ - ٤٠ وَ)/٥

ويؤخذ من هاتين المتباينتين أن

(٥٧ - ٢٠ وَ)/٢ > (١١٤ - ٤٠ وَ)/٥ ومنها يحدث

وَ < ٥٧/٢٠ أي < ٢ ١٧/٢٠

وحينئذ لا يمكن أن يفرض لغير المعين وَ إلا المقادير ٠، ١، ٢ فإذا كان

وَ = ٠ فيكون ل < ٥٧/٢ ، ل > ١١٤/٥ ولذا يمكن أن يفرض أن س = ٢٣،

أو ٢٤، أو ٢٥، أو ٢٦، أو ٢٧، أو ٢٨،

وإذا كان وَ = ١ وجب أن يكون ل < ٣٧/٢ ، ل > ٧٤/٥ وحينئذ يكون

ل = ١٥ أو ١٦ أو ١٧ أو ١٨

وإذا كان

(١) { ع = ٢ ، س = ٨ } (٢) { ص = ٤ ، س = ٣ }

المسئلة الخامسة

عدة من الرجال والنساء صرفوا خمسين فرنكاً في سكرة يخص كل رجل ٩٥ سنتيماً وكل امرأة ٦٥ سنتيماً والمراد معرفة عدد الرجال والنساء فلذلك يقال إذا جعل س رمزاً لعدد الرجال وص رمزاً لعدد النساء كان لهذه المسئلة حلول اربعة هي

(١) { س = ٢ ، ص = ٧٤ } (٢) { س = ١٥ ، ص = ٥٥ } (٣) { س = ٢٨ ، ص = ٣٦ } (٤) { س = ٤١ ، ص = ١٧ }

المسئلة السادسة

اذا كان المراد معرفة العدد الذي باقي قسمته على ٢٩ يساوي ١٦ وباقي قسمته على ٥٦ يساوي ٢٧

يقال في الجواب نحن نعلم انه يتوصل لحل هذه المسئلة بالقانون العمومي

م = ١١٤٧ + ٢١٨٤ و

الذي نعلم منه جميع الأعداد المحققة لمنطوق المسئلة وحينئذ يكون أصغر

المسئلة الثانية

اذا كان المراد قسمة ٧٠ غرشاً الى قطع من النقود منها ما قيمته خمسة غروش ومنها ما قيمته عشرون غرشاً

يجاب عن ذلك فيقال اذا رمز للقطع التي قيمة احداها خمسة غروش بالرمز س وللتي قيمة احداها عشرون غرشاً بالرمز ص نتج من ذلك لهذه المسئلة ثلاثة حلول هي

(١) س = ١٠ ، ص = ١ (٢) س = ٦ ، ص = ٢ (٣) س = ٢ ، ص = ٣

المسئلة الثالثة

اذا كان المراد تقسيم ٧١ غرشاً الى قطع من النقود منها ما قيمته خمسة غروش ومنها ما قيمته عشرون غرشاً يقال انه لا يوجد لهذه المسئلة حل صحيح

المسئلة الرابعة

اذا كان المراد قسمة ٢٦ غرشاً الى قطع من النقود منها ما قيمته خمسة غروش ومنها ما قيمته غرشان

يقال في الجواب انه اذا رمز لعدد القطع الاولى بالرمز ص وللثانية بالرمز س

نتج من ذلك حلاّنِ هما

(١) س = ١٥ ، ص = ٨٢ ، ع = ١٥

(٢) س = ٥٠ ، ص = ٤٠ ، ع = ٣٠

بند ١٤٧ وحيث كان الحل غير المعين للمعادلات التي تزيد درجتها عن الدرجة الأولى لا يندرج تحت ما ذكر فلم نتصد هنا إلا للحالة التي تكون فيها المعادلة ذات الدرجة الثانية والمجهولين غير محتوية على الدرجة الثانية لأحد المجهولين ويمكن اعتبار البحث عن حلول هذه المعادلة كالبحث عن الحل غير المعين لمعادلة ذات درجة أولى بأن يقال

كل معادلة ذات درجة ثانية ومجهولين غير محتوية على القوة الثانية لأحدهما توضع هكذا

$$\text{م س ص} + \text{ء س}^2 + \text{ع س} + \text{ك ص} = \text{ر} \quad \ldots\ldots (1)$$

فإذا حلت هذه المعادلة بالنسبة للمجهول ص تحصل

$$\text{ص} = \frac{-\text{ء س}^2 - \text{ع س} + \text{ر}}{\text{م س} + \text{ك}} \quad \ldots\ldots (2)$$

وإذا أجريت عملية القسمة الكائنة في هذا المقدار فإنه يحدث

$$\text{ص} = -\frac{\text{ء}}{\text{م}}\,\text{س} + \frac{\text{ء ك} - \text{م ع}}{\text{م}^2} + \frac{\text{م}^2\text{ر} + \text{م ع ك} - \text{ء ك}^2}{\text{م}^2(\text{م س} + \text{ك})}$$

ومن هنا يحدث

الأعداد المطلوبة هي ١١٤٧

المسألة السابعة

رجل اشترى ماية ماشية من خيل وبغال وحمير بمبلغ مائة من الأكياس وكان ثمن الفرس الواحد يساوي ثلاثة أكياس ونصف كيس وثمن البغل الواحد يساوي كيساً وثلث كيس وثمن الحمار الواحد يساوي نصف كيس والمراد معرفة عدد كل من هذه الأجناس

فلحل هذه المسألة يقال اذا رمز بالرمز س لعدد الخيول وبالرمز ص لعدد البغال وبالرمز ع لعدد الحمير كان لهذه المسألة ثلاثة حلول هي

(١)	(٢)	(٣)
س = ٥	س = ١٠	س = ١٥
ص = ٤٢	ص = ٢٤	ص = ٦
ع = ٥٣	ع = ٦٦	ع = ٧٩

المسألة الثامنة

ما هي الاعداد الثلاثة المرموز لها بالرموز س، ص، ع التي اذا ضرب الاول منها في ٣ والثاني في ٥ والثالث في ٧ كان مجموعها مساوياً ٥٦٠ واذا ضرب الأول في ٩ والثاني في ٢٥ والثالث في ٤٩ كان مجموع الحواصل الجزئية مساوياً ٢٩٢٠

لذلك يقال أن هذه المسألة يكون لها بعد اجراء العملية حلان هما

[illegible]

[illegible]

[illegible]

وان كان في الغرفة [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

م² ص = − م ح س + ح ك − م ح ج + ل/(م س + ك) .... (٢)

وذلك بجعل ل كناية عن م² ر + م ح ك ك − ح ك²

ولكي يكون كلا مقداري س، ص عدداً صحيحاً يلزم أن يكون ل/(م س + ك) عدداً صحيحاً ثم تحسب قواسم العدد ل ويجعل كل منها مساوياً للكمية م س + ك مسبوقاً بعلامة + و − فإن تحصل من المعادلات الناتجة من ذلك مقادير صحيحة للمجهول س وضعت هذه المقادير في المعادلة (٣) لاستخراج مقادير ص ولكي تكون هذه المقادير صحيحة يلزم أن يكون الطرف الثاني من المعادلة (٣) الذي يؤول إلى كمية معلومة قابلاً للقسمة على م²

ومن المعلوم أن عدد الحلول الصحيحة يكون دائماً منتهياً وقد لا يتيسر الحصول على واحد منها فإذا سلكنا هذه الطريقة في حل كل من المعادلات الثلاث

٢ س ص − ٣ ش + ص = ١ ع

٥ س ص = ٢ س + ٣ ص + ١٨ و

س ص + ش = ٢ س + ٣ ص + ٢٩

وبالعكس

فإذا كان العدد ع قاسماً لحاصل ضرب حـ ، ء وكان أولياً مع أحد المضروبين

حـ ، ء وكان أولياً مع المضروب حـ كان قاسماً للمضروب الآخر ء

وللبرهنة على ذلك نفرض أن حـ > ع ثم نفرض أننا نجري عملية بين

حـ ، ع مماثلة لعملية القاسم المشترك الأعظم بينهما فإذا رمزنا للخوارج

المتوالية الناتجة من هذا العمل بالرموز ك ، ك' ، ك'' ... وإلى البواقي

المتوالية بالرموز ب ، ب' ، ب'' .... فتحصل

$$\text{حـ} = \text{ع}\,\text{ك} + \text{ب}$$

$$\text{ع} = \text{ب}\,\text{ك}' + \text{ب}'$$

وبضرب كل من طرفي هذه المتساويات في العدد ء وقسمتها على العدد ع نحصل

$$\frac{\text{حـ}\,\text{ء}}{\text{ع}} = \text{ء}\,\text{ك} + \frac{\text{ب}\,\text{ء}}{\text{ع}} \quad , \quad \text{ء} = \frac{\text{ب}\,\text{ء}}{\text{ع}} \times \text{ك}' + \frac{\text{ب}'\,\text{ء}}{\text{ع}} \; \ldots\ldots$$

وحيث أن الطرف الأول $\frac{\text{حـ}\,\text{ء}}{\text{ع}}$ من المتساوية الأولى عدد صحيح فيكون

(٤٧)

بحيث ص وفرضنا أن س = ح' + ك و (بجعل و رمزا لعدد صحيح)

فإنه يحدث

$$ص = \frac{م ح'^2 + ع ح' - ر}{ك} - (٢ م ح' و + م ك و^2 + ع و)$$

وحيث فرض أن م ح'٢ + ع ح' - ر قابل للقسمة على ك فيكون مقدار ص المطابق س = ح' + ك و عددا صحيحا وهذه النتيجة لا يطرأ عليها تغير على أي وجه كانت علامة و ويؤخذ من ذلك أنه متى وجد للمعادلة المفروضة حلول صحيحة وكان مقدار س محصورا فيما بين الصفر و ك فلإيجاد جميع الحلول الصحيحة للمعادلة المفروضة توضع فيها بدل س الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ .... ك - ١ وحينئذ فكل حل صحيح مطابق لأحد هذه الأعداد يتحصل منه حلول أخرى غير متناهية

الباب الخامس

في نظريات الأعداد الأولية

والكسور غير القابلة للاختصار

وخواص قسمة الأعداد على بعض

قواسمها ونظريات على الجذور

لانه لما كان العدد م قابلاً للقسمة على ى كان م = ى × ك بفرض ك

رمزاً لعدد صحيح ولما كان العدد ى قاسماً للعدد م كان قاسماً للحاصل

ى ك وحيث أن ى اولي مع ى فيكون ى قاسماً للعدد ك وحينئذ يكون

ك = ى ك بفرض ك رمزاً لعدد صحيح وعليه فيكون م = ى ى ك

ومن هنا يعلم أن العدد م يقبل القسمة على ى ى وعلى هذا المنوال يبرهن

على أن العدد م يكون قابلاً للقسمة على الحاصل ى ى ى ....

النظرية الثانية

لا يمكن تحليل أي عدد الى مضاريب اولية الا بكيفية واحدة ١٤٢

مثلاً اذا فرض العدد ع = ح ى هـ و ..... (بجعل ح ، ى ، هـ ، و .....

رموزاً لمضاريب اولية متساوية أو غير متساوية) فلا يتأتى تحليله

بغير هذه الكيفية لانه اذا فرض أن ع = حَ ىَ هَ وَ ... (بجعل حَ ىَ هَ وَ ...

رموزاً لمضاريب اولية اخرى) كان ح ى هـ و ..... = حَ ىَ هَ وَ ...

وحينئذ يكون الحاصل ح ى هـ و ... قابلاً للقسمة على حَ ىَ هَ ... يكون

قابلاً للقسمة على أحد مضاريبه وحيث ان العدد ... مضاريب اولية معاً

فيكون أحدهما مساوياً ... ... مضروب

[illegible] من المتساوية الثانية عدداً صحيحاً

كانت الكمية $\frac{د}{ح}$ عدداً صحيحاً كذلك وهلم جرا وحيث أن م ، ح

عددان أوليان معاً فيكون أحد البواقي م ، ر ، ... مساوياً

للواحد وعليه فيكون $\frac{د \times ١}{ح} = \frac{د}{ح}$ عدداً صحيحاً

وبمثل هذا يبرهن على الحالة التي يكون فيها م < د

نتائج

(الأولى) كل عدد أولي كالعدد ح يكون قاسماً للحاصل م ، د ، هـ ، و

يقسم أحد مضاربيه لأنه إذا كان العدد ح لا يقسم العدد م كان

أولياً معه وحينئذ يلزم أنه يقسم د هـ و وكذلك إذا كان العدد ح

لا يقسم العدد د كان أولياً معه وحينئذ يلزم أنه يقسم هـ و وإذا كان

لا يقسم العدد هـ فإنه يلزم أن يكون قاسماً للعدد و

(الثانية) كل عدد أولي يكون قاسماً للعدد $م^ن$ يقسم العدد م حيث أن

$م^ن = م \times م \times م \times م \times$ ....

(الثالثة) متى كان العدد م قابلاً للقسمة على كل من الأعداد د ، د َ ، د ً ...

الأولية معاً كان قابلاً للقسمة على حاصل ضربها وهو د د َ د ً ......

مساوية (ا + ء + ...) (...) (...) وذلك بأن يعتبر الواحد والعدد

من جملة هذه القواسم

الثانية يؤخذ مما تقدم أن ١ + ح + ح٢ + ... + حن يكون مساوياً لخارج

قسمة حن+١ − ١ على ح − ١ وعليه فيكون حاصل جمع قواسم العدد ع

مبيناً بالمقدار

$$\frac{ح^{م+1}-1}{ح-1}\times\frac{ء^{ن+1}-1}{ء-1}\times\frac{هـ^{ك+1}-1}{هـ-1}$$

الثالثة ينتج مما تقدم في النتيجة الاولى أن القواسم المشتركة بين جملة أعداد

لا يمكن أن تكون محتوية على غير المضاريب الاولية المشتركة بين هذه

الأعداد وحينئذ يكون القاسم الأعظم المشترك بين جملة عدد مساوياً لحاصل

ضرب جميع المضاريب الاولية المشتركة [illegible] المشتركة بين

هذه الأعداد

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

من المتساوية المذكورة ينتج منه [illegible]

يكون مساويًا لأحد مضاريب الحاصل ح ر ء ر ... ر ثم تكون مضاريب

الحاصلين متساوية بالتناظر .

نتائج

الاولى اذا كان $\text{ع} = \text{ح}^{\text{م}}\, \text{ء}^{\text{ع}}\, \text{هـ}^{\text{ك}}$ وفرض أن ح ، ء ، هـ دالة على مضاريب اولية معًا والأسس م ، ع ، ك دالة على أعداد صحيحة موجبة فمن البديهي أن جميع المضاريب التي يمكن تكوينها من أس المضاريب الاولية ح ، ء ، هـ تكون قاسمة للعدد ع وتكون أس المضروب الأول مبتدئة من الصفر الى م والثاني من الصفر الى ع والثالث من الصفر الى ك وحينئذ لا يكون للعدد ع قواسم غير هذه الحواصل اذ لولا ذلك لأمكن تحليل هذا العدد الى جمل متنوعة من المضاريب الأولية ويؤخذ من ذلك أنه يمكن بالسهولة تحصيل قواسم العدد ع بحساب تفنيح حدود الحاصل

$$(1+\text{ح}+\text{ح}^{2}+\dots+\text{ح}^{\text{م}})(1+\text{ء}+\text{ء}^{2}+\dots+\text{ء}^{\text{ع}})(1+\text{هـ}+\text{هـ}^{2}+\dots\text{هـ}^{\text{ك}})$$

التي تكون مختلفة عن بعضها لكونه لا يوجد منها اثنان يكونان مركبين من مضاريب واحدة أولية متحدة في الاس وبناء على ذلك تكون عدة قواسم العدد

[illegible]

[illegible] على [illegible]

[illegible]

[illegible] على [illegible]

[illegible]

ولتيسير الاختصار [illegible] [illegible]

بالرمز [illegible] ثم برهن على [illegible]

دون أحد العددين ح ، ع كان عدد المضاريب الداخلة في حاصل ح

مختصة ... [illegible]

[illegible]

النظرية الثالثة

نبين أن الكسر لا يكون قابلاً للاختصار متى كان حداه أوليين معاً

مثلاً إذا كان ح/د كناية عن كسر حداه ح، د أوليان معاً يقال أن هذا

الكسر لا يقبل الاختصار لأنه لو أمكن اختصاره لكان مساوياً لكسر آخر كالكسر

ح'/د' حداه دون حديه فإذا فرض أن ح/د = ح'/د' كان ح د'/د = ح' وحينئذ

يكون د قاسماً لحاصل ح د' وحيث كان ح أولياً مع د فيكون

د' قابلاً للقسمة على د وهذا محال لأنه قد فرض أن د' أقل من د

النظرية الرابعة

يلزم لتساوي كسر بآخر غير قابل للاختصار أن يكون حدا الكسر الأول

مساويين لحدي الكسر الثاني مضروبين في عدد صحيح واحد

لأنه إذا فرض أن ح'/د' كسر غير قابل للاختصار وكان ح'/د' = ح/د نتج

من ذلك أن ح = ح' د/د' وبمقتضى هذه المتساوية يكون الحد د' الأولي

مع ح' قاسماً للحد د فإذا فرض أن د = م د' (بجعل م رمزاً لعدد صحيح)

[illegible]

حَ بدرجة ثانية أو بدرجة أعلى منها ان بَ على عدد المضاريب حتمية
على حً بدرجة ثالثة أو بدرجة على منها وهكذا وفرض نَ ، بَ ، بً ، ...
فان الحاصل د يكون قابلاً للقسمة على حَ ص ولا يكون قابلاً للقسمة على قوة
اعلى من حَ ص لكن حيث كان ح يحتوي بلا شك على مضاريب قابلة للقسمة
على حَ المأخوذ بكل قوة يوجد منها في الحاصل د فيكون ح قابلاً للقسمة
على حَ ص ومشتملاً على جميع المضاريب الأولية للحاصل د مرفوعة لـ
قوى مساوية بالأقل للقوى التي ارتفعت اليها هذه المضاريب في الحاصل د
وحينئذ يكون ح قابلاً للقسمة على د

وبمثل هذا يبرهن على أن الحاصل ١×٢×٣×...×م يكون قابلاً للقسمة
على ١×٢×٣×...×ح × ١×٢×٣×...×ع × ١×٢×٣×...×ك
بفرض أن م = ح + ع + ك + ...

في خواص قسمة الأعداد على بعض قواسمها

نمرة ١٤٢ خواص قسمة الأعداد على بعض قواسمها ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٩ ، ١١ الخ الموضحة في كتب الحساب تنحصر في قضية عمومية يمكن تطبيقها على جميع الجمل التعدادية مثلاً اذا فرضنا أن ع كناية عن عدد صحيح مكتوب بالنسبة لجملة تعدادية

أو تقبل القسمة على ك مساوياً بالأقل لعدد المضاريب الداخلة في الخاص د

لأنه اذا فرض أن ك ‹ د وجعل دَ رمزاً للجزء الصحيح من خارج قسمة د على ك كانت مكررات ك المحصورة في الأعداد المبتدئة من الواحد ى د مساوية ك، ٢ك، ٣ك ...... دَك

واذا فرض أيضاً أن ك ‹ ع وجعل عَ رمزاً للجزء الصحيح من خارج قسمة ع على ك كانت مكررات ك المحصورة في المتسلسلة المبتدئة من الواحد الى ع مساوية ك، ٢ك، ٣ك ...... عَك

وبالجملة اذا جعل مَ رمزاً للخارج الصحيح من قسمة م على ك كانت مكررات ك المحصورة بين الأعداد المبتدئة من الواحد الى م مساوية ك، ٢ك، ٣ك .... مَك وحيث فرض أن ع + د = م فيكون

$$\frac{م}{ك} = \frac{ع}{ك} + \frac{د}{ك}$$ وحينئذ يكون

$$مَ = عَ + دَ \quad أو \quad مَ > عَ + دَ$$

وحينئذ فقد ثبت المطلوب

فاذا جعل الآن حَ دالاً على مضروب اولى ن ل على عدد مضاريب د القابلة للقسمة على ح ن لَ على عدد المضاريب المشتملة على حَ

[illegible]

وثانياً انه يلزم لكي تكون قابلية قسمة عدد على أي قاسم مكون من الأساس المرفوع الى القوة النجمية ن الفصة واحداً عين الباقي المتحصل من قسمة حاصل جمع العقود الترتيبية مع بعضها من أرقام عدد ما م) على ذلك القاسم

وثالثاً انه يلزم لكي يكون باقي قسمة عدد على أي قاسم مكون من الأساس المرفوع الى القوة النجمية ن الناقصة واحداً عين الباقي المتحصل من قسمة الفضل ما بين حاصل جمع العقود الترتيبية الزوجية المتكونة من أرقام عددها م) وحاصل جمع العقود الترتيبية الفردية على القاسم المذكور

وبناءً على ذلك يلزم لكي تكون القسمة الأولى ممكنة أن تكون القسمة الثانية منتهية

ومتى أريد معرفة قابلية عدد كالعدد ع للقسمة على عدد آخر كالعدد ح بواسطة القواعد المتقدمة ينبغي ان يبدأ بالبحث عن قوة للأساس التي بقسمتها على ح يكون الباقي مساوياً للصفر أو +١ أو -١ فاذا كان العدد ح لا يحتوي الا على عوامل أولية للأساس [illegible] فانه

أساسها ل ثم توهمنا قسمة هذا العدد بالابتداء من اليمين الى الشمال الى عقود كل منها مشتمل على ارقام عددها م ماعدا العقد الأخير فانه قد يكون كاملاً وقد لا يكون كاملاً ثم رمزنا لهذه العقود بالرموز حـ ، ء ، هـ ، و وفرضنا أنها منفصلة عن بعضها تحصل

$$ع = حـ + ء\,ل^{م} + هـ\,ل^{٢م} + و\,ل^{٣م}$$

ويمكن وضع هذا المقدار بهذه الصور الثلاث وهى

$$ع = ل^{م}(ء + هـ\,ل^{م} + و\,ل^{٢م} + \dots) + حـ$$

$$ع = [ء(ل^{م} - ١) + هـ(ل^{٢م} - ١) + و(ل^{٣م} - ١)] + (حـ + ء + هـ + و)$$

$$ع = [ء(ل^{م} + ١) + هـ(ل^{٢م} - ١) + و(ل^{٣م} + ١) \dots] + (حـ + هـ + \dots) - (ء + و + \dots)$$

وحينئذٍ تكون الاجزاء الأول من مقادير ع المبينة بهذه الصور الثلاث قابلة للقسمة بالتناظر على $ل^{م}$ ، $ل^{م} - ١$ ، $ل^{م} + ١$ ومن هنا تؤخذ القواعد الآتية وهى

أنه يلزم اولاً فى كل جملة تعدادية ان يكون باقى قسمة عدد على أى قاسم مكون من الأساس المرفوع الى القوة الميمية عين الباقى المتحصل من قسمة العقد الاول (المتألف من أرقام عددها م مأخوذة من يمين العدد)

لأنه لما كان $ل^{٢م} - ١ = (ل^{م} - ١)(ل^{م} + ١)$ لزم أن يكون ح قاسماً للعدد $ل^{م} - ١$ أو $ل^{م} + ١$ وحينئذ لا يكون قاسماً $ل^{م} - ١$ وانما يكون قاسماً $ل^{م} + ١$

فاذا فرض مثلاً أن ح = ٣٧ وقسمت القوى المتوالية للعدد ١٠ على ٣٧ كانت القوة الثالثة للعدد ١٠ المذكور هي التي يتحصل منها باقٍ مساوٍ +١ وينتج من ذلك ان قابلية أي عدد للقسمة على ٣٧ تتوقف على قابلية قسمة حاصل جمع العقود (التي كل منها مركب من ثلاثة ارقام) على ٣٧

واذا فرض ايضاً أن ح = ٧ كانت أصغر قوى العدد ١٠ التي تقسم على ٧ ليكون الباقي مساوياً +١ هي ١٠٠٠٠٠٠ وعليه فكل عدد يقبل القسمة على العدد ٧ يكون له ارتباط بقابلية حاصل جمع العقود (التي كل منها مؤلف من ستة ارقام) على العدد ٧ وحيث أن باقي قسمة العدد ١٠٠٠ على ٧ يساوي −١ فينتج من ذلك أن أي عدد يكون قابلاً للقسمة على ٧ متى كان الفاصل بين حاصل جمع العقود الفردية المرتبة (التي كل منها مؤلف من ثلاثة ارقام) وحاصل جمع العقود الزوجية المرتبة (التي كل منها مؤلف من ثلاثة ارقام) قابلاً للقسمة على ٧

يتحصل لهذا الأساس قوة تكون قابلة للقسمة على ح وحينئذٍ يجب أن تطبق القاعدة الاولى على ذلك

واذا كان العدد ح اوليًا مع الأساس ل فانه يبرهن على أنه يوجد لهذا الأساس قوة اذا نقصت عن أصلها واحدًا كان الباقي قابلاً للقسمة على ح لانه اذا قسمت القوى المتوالية $ل ، ل^{٢} ، ل^{٣} ...... ل^{ح-١}$ للأساس ل على العدد ح تحصل من ذلك بواقي عددها ح يكون كل واحد منها دون هذا العدد ولا يكون معدومًا لان ح أولى مع الأساس ل ويؤخذ من هذا انه لو تحصل من ذلك باقيان متساويان لتحصلت المتساويتان $ل^{ن} = ح ك + ر$ و $ل^{ن+م} = ح ك' + ر$ (بفرض أن $ن+م$ يكون دالاً على عدد دون ح) اللتان يستنتج منهما أن $ل^{ن} (ل^{م} - ١) = ح (ك' - ك)$ وعليه فيكون ح قاسمًا للحاصل $ل^{ن} (ل^{م} - ١)$ وحيث أن ح اولي مع كل من $ل ، ل^{ن}$ فيكون قاسمًا $ل^{م} - ١$

واذا فرض أن ح عدد اولي وأن $ل^{م}$ كناية عن أصغر قوة للأساس . ل بحيث اذا نقصت عن أصلها واحدًا كان الباقي قابلاً للقسمة على ح فان كان العدد م زوجيًا ومبينًا بالرمز ٢ن كان ح قاسمًا $ل^{ن} + ١$

ثم كذلك وتكون متساوية متقدمة غير محققة مالم يكن ح د = ه^م

ن ى = و^م (كما في بند ١٢٦)

فائدتان

ثم (الاولى) القوى المتوالية لعدد اكبر من الواحد كالعدد ح لا تزال آخذة في الازدياد الى غير نهاية

ولذلك يفرض أن ح > ١ فيوخذ من ذلك مباشرة أن $ح^٢$ > ح ، $ح^٣$ > $ح^٢$ ،

ن ..... $ح^{م+١}$ > $ح^م$

فاذا فرض أن ح - ١ = ى كان $ح^٢$ - ح > ى وبناء على ذلك يكون $ح^٣$ - $ح^٢$ > ى ن ..... $ح^{م+١}$ - $ح^م$ > ى وبضم هذه الارتباطات الى بعضها طرفا بطرف يحصل $ح^م$ - ١ > م ى أو $ح^م$ > ١ + م ى وحينئذ يمكن [illegible] كبيرا بحيث تكون كمية ١ + م ى اكبر من كل كمية [illegible] [illegible] ١ + م ى [illegible] تتحقق [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible]

ثم ([illegible]) [illegible] [illegible] الواحد [illegible]

في بعض نظريات تتعلق ...

١٢٨ ... الجذر ...

وللبرهنة على ذلك ...

لو فرض ...

يفرض انه غير قابل للاختصار كان ... ويلزم أن يكون

د قابلا للقسمة على ...

د هـ كذلك لانه اذا فرض ان ...

من د هـ كان هذا المضروب ...

لا يكون الكسر ... مساويا العدد صحيح ...

فاسدا

النظرية الثانية

١٢٩ لكي يكون الجذر الميمي لكسر غير قابل للاختصار منطقا يلزم أن يكون حداه

مركبين من قوة صحيحة درجتها م فاذا رمز لهذا الكسر بالرمز $\frac{ح}{ء}$ وكان

جذر الميمي مبينا بالكسر $\frac{ح}{ء}$ الذي يفرض غير قابل للاختصار كان

$\frac{ح}{ء} = \frac{هـ^م}{و^م}$ وحيث أن الكسر $\frac{ح}{ء}$ غير قابل للاختصار فيكون الكسر

$\frac{هـ^م}{و^م}$

فاذا فرض أن هـ كناية عن كمية معلومة صغيرة بقدر ما يراد وفرض الأس م مقدار بحيث يحصل (١+هـ)^م > (كان فيه ـــ/١٥) كان الجذر الميمى للعدد ح أقل من ١+هـ .

واذا اعتبر الآن عدد دون ... ... وفرض أن هـَ كناية عن ... ... كناية عن جذر الذى درجته ... ... المذكور ... ... أصغر من الواحد بحيث أن ... ... فيكون ... وحينئذ ...

وان فرض أن هـ كناية عن كمية صغيرة بقدر ما يراد وفرض الأس م مقدار بحيث يحصل (١-هـ)^م < (كان ... ـــ/١٥) كان الجذر الذى درجته م للعدد ... أكبر من ١-هـ

الباب الرابع

في ... جذور ... المعادلات الأسية اللوغارتمية في ... أحد ...

... في ... اللوغارتمية من ... أول أن ... أى كمية

آخذة في التناقص إلى أن تقرب من الصفر.

ولذا يقال حيث أن ح > ١ فيؤخذ من ذلك مباشرة أن ح^٢ > ح ، ح^٣ > ح^٢

...... ح^{م+١} > ح^م فإذا فرض أن ح = ١/ع كان ع أكبر من الواحد

وحينئذ يكون ع = ١/ح ومنها يحدث ح^م = ١/ع^م وعلى ذلك إذا

جعل ع رمز الكمية معلومة صغيرة ما أمكن فلا يتحقق الارتباط

ح^م > ع إلا إذا كان ١/ع^م > ع أو ع^م < ١/ع وحينئذ يمكن

بمقتضى النظرية المتقدمة تحصيل مقدار للأس م يكون محققاً لهذا

الشرط الأخير

النظرية السابعة

بند ١٥٢ الجذر الميمي لأي عدد يقرب من الواحد كلما ازدادت درجة الجذر

ويمكن أخذ م كبيراً بحيث يكون هذا الجذر مختلفاً عن الواحد بكمية معلومة

يعتبر عدد أكبر من الواحد كالعدد ح ثم يفرض أن ح' كناية عن الجذر

الميمي للعدد ح ، ح'' كناية عن الجذر الذي درجته م + د للعدد المذكور

فيكون العددان ح' ، ح'' أكبر من الواحد ويكون ح = ح'^م = ح''^{م+د} = ح''^م × ح''^د

وحينئذ يكون ح'^م > ح''^م وبمقتضى ذلك يكون ح' > ح''

[illegible] قد [illegible] من نحو [illegible]

[illegible]

على أن الجذر التربيعي لعدد يكون له مقداران [illegible]

الجذر الثالث للعدد [illegible] ثلاثة مقادير لأنه [illegible]

الجذر المطلوب بالرمز ح والعدد المعلوم بالرمز [illegible]

س٣ − ح٣ = ٠ وقد تقدم أن س٣ − ح٣ يقبل القسمة على س − ح

فإذا أجريت عملية القسمة تحصلت معادلة (س − ح) (س٢ + ح س + ح٢) = ٠

التي لا تتحقق إلا بفرض أحد المضروبين (س − ح) ، (س٢ + ح س + ح٢)

يساوي صفرا ومن هنا تستخرج ثلاثة مقادير للجذر الثالث [illegible]

يبرهن على أن الجذر الرابع له أربعة مقادير و [illegible]

وهكذا وعليه فيكون للجذر [illegible] للعدد [illegible] مقادير [illegible]

في جمع الجذور [illegible] وطرحها وضربها وقسمتها

[illegible] ما تقدم [illegible] ١٥٢

المنطقة ذات [illegible]

غير المنطقة التي من أي درجة بحيث أنه قد سبق [illegible] تعريف جذور

هي حاصل الضرب مركب من جملة مضاريب كل منها مساوٍ لجذر

وعليه فالقوة الميمية لجملة تساوي حاصل ضرب مركب من مضاريب عددها م كل منها مساوٍ لهذه الجملة ويلزم بمقتضى قاعدة ضرب الجذور لتكوين القوة الميمية لحد أن يرفع مكونه الى القوة الميمية ونضرب أس كل من حروفه في م

وينتج مما تقدم أنه يلزم لايجاد الجذر الميمي لحد أن يؤخذ الجذر الميمي لمكوّنه وتقسم اس كل من حروفه على م مثلاً الجذر الثالث للحد ٦٤ ح٦ ء٣ هو ٤ ح٢ ء والجذر الخامس للحد ٣٢ ح٥ ء١٠ هـ١٥ هو ٢ ح ء٢ هـ٣ وحينئذ يلزم لاستخراج الجذر الميمي لحد أن يكون مكونه الرقمي قوة صحيحة درجتها م وأن يكون اس كل من حروفه قابلة للقسمة على م فان كان أحد هذين الشرطين غير محقق كان الجذر الميمي للحد غير منطق ويستدل عليه بوضعه تحت علامة ᵐ√ ويطلق على العدد م المكتوب بين شعبتي هذه العلامة اسم دليل الجذر وبمقتضى قاعدة ضرب الكسور يلزم لايجاد القوة الميمية لكسر أن يرفع كل من حديه الى القوة م وعليه فيستخرج الجذر الميمي لكسر بأخذ الجذر الميمي لكل من حديه

ثم حيث انه يبرهن بمثل ما تقدم في ضرب الجذور وفي قسمتها فيكون

$$\frac{\sqrt[م]{ه}}{\sqrt[م]{ى}} = \sqrt[م]{\frac{ه}{ى}} .$$

وينتج مما تقدم في الضرب والقسمة أنه يمكن ادخال مضروب تحت علامة الجذر بضرب اسه في دليل الجذر واخراجه من تحتها بقسمة اسه على دليل الجذر مثاله

$$\sqrt[م]{ح^{م} ى} = ح \sqrt[م]{ى} ،$$

$$ح \sqrt[م]{ى} = \sqrt[م]{ح^{م} ى} ،$$

$$\sqrt[م]{\frac{ح^{م} ه}{ى}} = ح \sqrt[م]{\frac{ه}{ى}} ،$$

$$ح \sqrt[م]{\frac{ه}{ى}} = \sqrt[م]{\frac{ح^{م} ه}{ى}}$$

وبمثل ذلك يتحصل

$$\sqrt[م]{ح^{من} ى^{ن}} = \sqrt[م]{ح^{من}} \times \sqrt[م]{ى^{ن}} = ح^{ن} \sqrt[م]{ى^{ن}} ،$$

$$\sqrt[م]{\frac{ى ه^{ن}}{ح^{من}}} = \frac{\sqrt[م]{ى ه^{ن}}}{\sqrt[م]{ح^{من}}} = \frac{\sqrt[م]{ى ه^{ن}}}{ح^{ن}}$$

وهذا هو المعروف بقاعدة اخراج المضروب من تحت علامة الجذر

المتشابهة وغير المتشابهة فلا نذكر هنا الا العمليات التي يقتضى أن تجرى عليها فنقول

في جمع الجذور المتشابهة وطرحها

اذا اريد ايجاد حاصل جمع ...

واذا اريد ايجاد باقي طرح ...

واذا اريد ايجاد ناتج ...

في ضرب الجذور المتحدة ...

١٥٩ يلزم لتكوين حاصل ضرب جملة جذور ... تضرب الكميات الموضوعة تحت كل علامة جذرية ...

واحدة بين ... دليل الجذر ...

...

صرب ... × ...

في قسمة ...

[illegible]

[illegible]

[illegible] وحدة [illegible]

في [illegible] أصغر [illegible]

[illegible] قيمة [illegible]

مذكورة [illegible] موضوعة تحت علامة [illegible]

[illegible] المذكورة [illegible] مقدمة [illegible]

[illegible] = [illegible]

[illegible] موضوعة تحت علامة [illegible]

[illegible] في [illegible] وخرج قيمة [illegible]

[illegible] في [illegible]

[illegible] في [illegible] وخارج [illegible]

[illegible]

... بعضها

... لاحتـ ... وينظر هل هي

... شذوذ

... أنها تؤول لبعد

ولا شك أن عدد الجذور ... متشابهة

... بين الجذر والعدد صحيح

... العدد ... أنها ... لا

... الجذران = ٢

... ...

... ...

... الجذور ...

... ... الآخر ...

التي يرد ... بها أن ... جذر ... للكمية موضوعة تحت ... الأس

... [illegible] ... يكون

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

جذر ... [illegible]

وعليه يكون

[illegible]

[illegible]

... قد تقدم أنه يلزم لاستخراج جذر ... للكمية ... [illegible]

$$\sqrt[3]{\text{هـ}^{2}\text{د}}\times\sqrt[4]{\text{هـ}^{3}\text{د}^{2}}\times\sqrt[6]{\text{هـ}^{5}\text{د}}=\sqrt[12]{\text{هـ}^{8}\text{د}^{4}}\times\sqrt[12]{\text{هـ}^{9}\text{د}^{6}}\times\sqrt[12]{\text{هـ}^{10}\text{د}^{2}}=\sqrt[12]{\text{هـ}^{27}\text{د}^{12}}=\sqrt[4]{\text{هـ}^{9}\text{د}^{4}}$$

$$=\text{هـ}^{2}\text{د}\sqrt[4]{\text{هـ}}$$

وبمثل هذا يحصل

$$\frac{\sqrt[5]{\text{هـ}^{3}\text{د}^{2}}}{\sqrt[7]{\text{هـ}^{4}\text{د}^{3}}}=\frac{\sqrt[35]{\text{هـ}^{21}\text{د}^{14}}}{\sqrt[35]{\text{هـ}^{20}\text{د}^{15}}}=\sqrt[35]{\frac{\text{هـ}^{21}\text{د}^{14}}{\text{هـ}^{20}\text{د}^{15}}}=\sqrt[35]{\frac{\text{هـ}}{\text{د}}}$$

بند ١٦٠ يلزم لرفع جذر غير منطق الى أى قوة أن نرفع الكمية التى تحت علامته الى درجة هذه القوة مثلاً اذا اريد رفع $\sqrt[م]{ح}$ الى القوة التى دليلها ن شوهد أنه يحصل $\left(\sqrt[م]{ح}\right)^{ن}=\sqrt[م]{ح^{ن}}$ لان

$$\left(\sqrt[م]{ح}\right)^{ن}=\sqrt[م]{ح}\times\sqrt[م]{ح}\times\sqrt[م]{ح}\times\ldots=\sqrt[م]{ح\times ح\times ح\times\ldots}=\sqrt[م]{ح^{ن}}$$

ومتى كان دليل الجذر قابلاً للقسمة على درجة القوة التى يُراد رفع ما تحت العلامة اليها اجرى العمل بهذه المثابة وهى أن يقسم العدد الأول على الثانى فيحدث

$$\left(\sqrt[م]{ح}\right)^{ن}=\sqrt[م]{ح^{ن}}=\sqrt[\frac{م}{ن}]{ح}$$

بند ١٦١ الجذر الميمى لكمية غير منطقة يحصل بضرب دليلها فى درجة الجذر الميمى

التى

وحينئذ يؤخذ من هذه النتائج المختلفة ان القواعد المنسوبة للأس الكسرية لا تختلف عن القواعد المتعلقة بالأس الصحيحة.

بند ١٦٣ قد تقدم في الاس السالبة انه متى كان الاس $م$ سالباً أمكن أخذ المقدار $\frac{1}{ح^{م}}$ بدل $ح^{م}$ وذلك لا يختلف في الأس الكسرية بمعنى أن $ح^{-\frac{م}{ن}} = \frac{1}{ح^{\frac{م}{ن}}}$ لان

$$ح^{-\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{ح^{-م}} = \sqrt[ن]{\frac{1}{ح^{م}}} = \frac{1}{\sqrt[ن]{ح^{م}}} = \frac{1}{ح^{\frac{م}{ن}}}$$

في المتواليات الاسية

بند ١٦٤ خواص الأس توصل الى نظرية ضرورية تحل بها جملة مسائل وكثيرة الاستعمال في الحسابات العددية

وحينئذ يلزم ان يبرهن على أن جميع الاعداد تنتج من قوى عدد ثابت موجب اكبر من الواحد ولذا نرمز بالرمز $ح$ لعدد ثابت موجب اكبر من الواحد ونكوّن القوى المتوالية $ح$, $ح^{2}$, $ح^{3}$ .. فيحدث من ذلك جملة اعداد آخذة في الازدياد وغير منتهية

على م فانكانت القسمة ممكنة وجعل خ رمز الخارج القسمة كان الجذر النوني للكمية $ح^{ع}$ مبينا هكذا $ح^{خ}$ وانكانت القسمة غير ممكنة أمكن ان يكون الجذر غير المنطق $\sqrt[م]{ح^{ع}}$ مبينا هكذا $ح^{\frac{ع}{م}}$

بند ١٦٢ القواعد التي يلزم تطبيقها على الأسس الكسرية تؤخذ من القواعد المقررة في شأن الجذور غير المنطقة مثلاً اذا اعتبرنا الآن احوال الضرب والقسمة وتكوين القوى واستخراج الجذور شوهد أن

$$ح^{\frac{م}{ن}} \times ح^{\frac{ع}{ك}} = \sqrt[ن]{ح^{م}} \times \sqrt[ك]{ح^{ع}} = \sqrt[نك]{ح^{مك}} \times \sqrt[نك]{ح^{عن}} = \sqrt[نك]{ح^{مك+عن}}$$

$$= ح^{\frac{مك+عن}{نك}} = ح^{\frac{م}{ن}+\frac{ع}{ك}} \quad و$$

$$ح^{\frac{م}{ن}} : ح^{\frac{ع}{ك}} = \sqrt[ن]{ح^{م}} : \sqrt[ك]{ح^{ع}} = \sqrt[نك]{ح^{مك}} : \sqrt[نك]{ح^{عن}} = \sqrt[نك]{ح^{مك-عن}}$$

$$= ح^{\frac{مك-عن}{نك}} = ح^{\frac{م}{ن}-\frac{ع}{ك}} \quad و$$

$$\left(ح^{\frac{م}{ن}}\right)^{ع} = \left(\sqrt[ن]{ح^{م}}\right)^{ع} = \sqrt[ن]{ح^{مع}} = ح^{\frac{مع}{ن}} \quad و$$

$$\sqrt[ع]{ح^{\frac{م}{ن}}} = \sqrt[ع]{\sqrt[ن]{ح^{م}}} = \sqrt[نع]{ح^{م}} = ح^{\frac{م}{نع}} \quad و$$

$$\left(ح^{\frac{م}{ن}}\right)^{\frac{ع}{ك}} = \sqrt[ك]{\left(\sqrt[ن]{ح^{م}}\right)^{ع}} = \sqrt[ك]{\sqrt[ن]{ح^{مع}}} = \sqrt[نك]{ح^{مع}} = ح^{\frac{مع}{نك}}$$

بكيفية متوالية بالابتداء من الصفر الى $+\infty$ اخذ ص جميع المقادير من الواحد الى $+\infty$

واذا فرض للمتغير س مقادير سالبة بأن كان $س = -سَ$ آلت المعادلة المتقدمة الى

$$ص = ح^{-سَ} = \frac{1}{ح^{سَ}}$$

فاذا فرض أن سَ يأخذ مقادير من ابتدا الصفر الى $+\infty$ فان $ح^{سَ}$ يأخذ مقادير من ابتدا الواحد الى $+\infty$ وحينئذ يكون للمتغير $\frac{1}{ح^{سَ}}$ مقادير من ابتدا الواحد الى $\frac{1}{\infty}$ او الى الصفر

ولنفرض الآن أن ح يكون دالاً على عدد دون الواحد مبين بالكسر $\frac{1}{ى}$ (بفرض ى عدداً اكبر من الواحد) فتؤول المعادلة

$$ص = ح^{س} \text{ الى } ص = \left(\frac{1}{ى}\right)^{س} = \frac{1}{ى^{س}}$$

واذا اخذ س جميع المقادير من ابتدا الواحد الى $+\infty$ اخذ $ى^{س}$ جميع الأعداد من الواحد الى $+\infty$ وعليه تكون جميع مقادير ص محصورة بين الواحد والصفر واذا فرض للمتغير س مقادير من [illegible] الى $-\infty$ أخذ $ى^{س}$ جميع المقادير المحصورة بين الواحد والصفر وعليه يكون للمتغير ص جميع الاعداد من ابتدا الواحد الى ∞

فاذ فرض كسر حيثما اتفق كالكسر $\frac{م}{ح}$ الذي يكون حداه م، ح دالين على عددين صحيحين موجبين كان المقدار $ح^{\frac{م}{ح}}$ اكبر من الواحد لانه يكافئ $\sqrt[ح]{ح^م}$ وحيث أن العدد ح اكبر من الواحد فيكون $ح^م$ اكبر من الواحد وعليه فيكون المقدار $\sqrt[ح]{ح^م}$ دالاً على عدد اكبر من الواحد ويكون ايضاً المقدار $ح^{\frac{م}{ح}}$ آخذاً في الكبر كلما كبر الأس لانه اذا رمز بالرمزين ح، ء لأسين موجبين حيثما اتفق حدث $ح^{ح+ء} = ح^ح \times ح^ء$ وحيث أن $ح^ء$ أكبر من الواحد يكون حاصل الضرب $ح^ح \times ح^ء$ اكبر من $ح^ح$

واذا فرض الآن أن $ء = \frac{1}{م}$ (بفرض م عدداً صحيحاً) كان

$ح^{ح+ء} - ح^ح = ح^ح (ح^{\frac{1}{م}} - 1) = ح^ح (\sqrt[م]{ح} - 1)$ وحيث شوهد أنه يمكن أن يفرض العدد م مقداراً كافياً بحيث يكون $\sqrt[م]{ح}$ مختلفاً عن الواحد بقدر ما يراد (كما في سند ١٥١) فيمكن أن يفرض العدد ء مقداراً صغيراً بحيث يكون الفرق $ح^{ح+ء} - ح^ح$ صغيراً بقدر ما يراد

ومن هنا يؤخذ انه اذا رمز بالرمزين س، ص لكميتين متغيرتين ووضعت المعادلة $ص = ح^س$ وفرض للمتغير س جملة مقادير متقاربة بعضها من بعض بالابتداء من الصفر الى $+\infty$ كان للمتغير ص جملة مقادير متقاربة بعضها من بعض بحيث اذا زاد س بكيفية

[illegible]

[illegible]

تكون المعادلة المتقدمة [illegible] ومنها يحدث [illegible]

وحيث أن القوى المتوالية للعدد ٢ هي ٢، ٤، ٨، ١٦ ... فيكون مقدار

ص محصوراً بين ٣ و٤ وعليه فيكون $س = ٣ + \frac{١}{ع}$ وإذا وضع هذا

المقدار في المعادلة $١٠ = ٢^{س}$ حدث

$$٢^{٣ + \frac{١}{ع}} = ١٠ \quad أي \quad ٢^{٣} \times ٢^{\frac{١}{ع}} = ١٠ \quad ومنها يحدث$$

$$٢^{\frac{١}{ع}} = \frac{١٠}{٨} = ١,٢٥ \quad أو \quad (١,٢٥)^{ع} = ٢$$

وإذا كونت القوى المتوالية للعدد ١,٢٥ كان العدد ٢ محصوراً بين

$(١,٢٥)^{٣}$ و$(١,٢٥)^{٤}$ وحينئذ يكون $ع = ٣ + \frac{١}{ف}$ وإذا وضع بدل ع

مقداره في المعادلة الأخيرة تحصل

$$(١,٢٥)^{٣ + \frac{١}{ف}} = ٢ \quad ومنها يحدث$$

$$(١,٢٥)^{\frac{١}{ف}} = [illegible] = ١,٠٢٤ \quad أو \quad (١,٠٢٤)^{ف} = ١,٢٥$$

وعلى ذلك يعلم من المعادلة الأخيرة أن مقدار ف يكون محصوراً بين

٩ و١٠ وحينئذ يكون $ف = ٩ + \frac{١}{ق}$ وهلم جرا

ويتبين مما سبق انه اذا كونت جميع القوى لعدد موجب اكبر من الواحد أو أصغر منه أمكن استنتاج جميع الاعداد

بند ١٦٥ اذا فرض فى المعادلة $ص = ح^س$ أن ص معلوم ورمز له بالرمز د فكانت

$ح^س = د$

ولاستخراج مقدار س من هذه المعادلة يفرض فى ابتداء الامر أن ح > ١ ، د > ١

وحينئذ اذا وضعت بدل س الاعداد الصحيحة ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ......

توصل بذلك الى مقدارين متتاليين للعددين م ، م+١ (وربما كانت م صفرا) بحيث يكون $ح^م < د$ ، $ح^{م+١} > د$ كان مقدار س محصورا

بين م ، م+١

واذا فرض أن $س = م + \frac{١}{ص}$ (بجعل ص أكبر من الواحد) آلت المعادلة المفروضة الى $ح^{م+\frac{١}{ص}} = د$ أى $ح^م × ح^{\frac{١}{ص}} = د$ ومنها يحدث

$$ح^{\frac{١}{ص}} = \frac{د}{ح^م} \quad أو \quad ح = \left(\frac{د}{ح^م}\right)^ص$$

وحيث أن خارج قسمة د على $ح^م$ محصور بين ١ ، ح فيمكن تعيين المقدار الصحيح المقرب من ص بأن يعوض عن ص بالاعداد ١ ، ٢ ، ٣ ....

وبتوالى العمل على هذا المنوال يتحصل للمجهول س مقدار تقريبى

مثلا

[illegible]

[illegible]

[illegible]

ويطلق اسم معادلات [illegible]

الأولى

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

وبناءً عليه يكون

$$س = ٣ + \cfrac{١}{٣ + \cfrac{١}{٩ + الخ}}$$

فاذا حسبت الآئلة الرابعة لهذا الكسر المتسلسل تحصل $\frac{٢٨}{٩٣}$ وهو المقدار المقرب للمجهول س وهذا المقدار يزيد عن المقدار الحقيقي غير أن الخطأ يكون فيه اقل من $\frac{١}{٩٣ \times ١٠٣}$ أى من $\frac{١}{٩٥٧٩}$

واذا فرض الآن فى المعادلة $حـ^س = ء$ أن $حـ > ١$ و $ء < ١$ كان مقدار س سالبًا فاذا جعل $س = -ص$ آلت المعادلة المتقدمة الى

$$حـ^{-ص} = ء \quad أو \quad \frac{١}{حـ^ص} = ء \quad ومنها يحدث$$

$$حـ^ص = \frac{١}{ء}$$

وحيث أن ء اقل من الواحد فيكون $\frac{١}{ء}$ اكبر من الواحد وعليه فقد آل الامر الى الحالة السابقة

واذا فرض أن $حـ < ١$ و $ء > ١$ كان مقدار س سالبًا أيضًا فاذا جعل $س = -ص$ كان

$$حـ^{-ص} = ء \quad أى \quad \frac{١}{حـ^ص} = ء \quad ومنها يحدث$$

$$\left(\frac{١}{حـ}\right)^ص = ء$$

وحيث ان

$$\frac{ط}{ح} = ح^{ط} \times ء^{\frac{ك ط}{ح}} = ح^{ط} \times ء^{ى} = ء$$

فان كان ء أصغر من الواحد كان س سالبًا فاذا فرضنا انه منطبق ويبين بالعموم

$-\frac{م}{ح}$ نحصل $ح^{-\frac{م}{ح}} = ء$ ومنها يحدث $ء^{ح} = \frac{١}{ح^{م}}$ وبمقتضى هذه المساواة

الاخيرة ينبغي ان يكون ء كسرا وباختصار حديه يكون بسطه الواحد

ومقامه عددا كالعدد $ح^{م}$ مثلا اذا فرضنا أن $ح = ح^{ك} \times ء^{ل}$ كما تقدم

وجب ان يكون $ء = \frac{١}{ح^{\frac{ط}{ى}}}$ ، $\frac{ط}{ح} = \frac{ى}{ك}$

ومتى كان $ح = ١٠$ ، $ء > ١$ آلت الشروط المتقدمة الى $ء = ١٠^{ط} \times ه^{ى}$ ،

$ط = ى$ ومن هنا يحدث $ء = ١٠^{ط}$

ومتى كان ء أصغر من الواحد لزم أن يكون $ء = \frac{١}{١٠^{ط} \times ه^{ى}}$ ، $ط = ى$ ومنها

يحدث $ء = \frac{١}{١٠^{ط}}$ وينتج من ذلك ان مقدار س يكون منطقًا في الحالة

التي يكون فيها ح مساويًا للعدد الصحيح ١٠

في الخواص العمومية للوغارتمات

بند ١٢٦ اذا اعتبرنا أن الاعداد مكونة من القوى المتنوعة لعدد ثابت [illegible]

ا [illegible] هذه القوى [illegible] [illegible]

س في المعادلة ص = حس [illegible]

حيث كان $\text{ح}^{\text{ن}}$ عدداً صحيحاً وثبت هنا ايضاً انه ينبغي ان يكون ح ، ى مركبين من مضاريب اولية واحدة لان كل مضروب اولي قاسم للعدد ح يقسم $\text{ح}^{\text{م}}$ وبسببه يكون قاسماً للعدد $\text{ى}^{\text{م}}$ أو ى وبمثل هذا يبرهن على أن كل مضروب اولي للعدد ى يقسم العدد ح

فاذا فرضنا ان $\text{ح} = \bar{\text{ح}}^{\text{ع}} \bar{\text{ى}}^{\text{ك}}$ ، $\text{ى} = \bar{\text{ح}}^{\text{ط}} \bar{\text{ى}}^{\text{ى}}$ (بجعل $\bar{\text{ح}}$ ، $\bar{\text{ى}}$ كناية عن المضاريب الاولية للعددين ح ، ى) آلت المتساوية $\text{ح}^{\text{م}} = \text{ى}^{\text{ن}}$ الى

$$\bar{\text{ح}}^{\text{مع}} \times \bar{\text{ى}}^{\text{مك}} = \bar{\text{ح}}^{\text{نط}} \times \bar{\text{ى}}^{\text{نى}}$$

ولكي تكون هذه المتساوية حقيقية يلزم ان يكون $\text{مع} = \text{نط}$ ، $\text{مك} = \text{نى}$

وهاتان المتساويتان يحدث منهما

$$\frac{\text{م}}{\text{ن}} = \frac{\text{ط}}{\text{ع}} = \frac{\text{ى}}{\text{ك}}$$

وعليه فلكي يكون مقدار س منطقاً يلزم ان يكون ى عدداً صحيحاً وان تكون المضاريب الاولية للعدد ى عين المضاريب الاولية للعدد ح وان تكون اسس مضاريب العدد ى مناسبة لاسس مضاريب العدد ح

وتكون الشروط المذكورة كافية لتحقيق ما ذكر لانه اذا فرضنا [illegible]

$\text{ى} = \bar{\text{ح}}^{\text{ط}} \times \bar{\text{ى}}^{\text{ى}}$ ، $\frac{\text{ط}}{\text{ع}} = \frac{\text{ث}}{\text{ت}}$ تحصل

اولاً أن لوغارتم حاصل ضرب يكون مساوياً لمجموع لوغارتمات مضاربيه

وثانياً أن لوغارتم خارج قسمة عددين يكون مساوياً للوغارتم المقسوم مطروحاً منه لوغارتم المقسوم عليه

وثالثاً ان لوغارتم أي قوة لاي عدد يكون مساوياً للوغارتم هذا العدد مضروباً في درجة القوة المذكورة

ورابعاً أن لوغارتم جذر أي عدد يكون مساوياً للوغارتم هذا العدد مقسوماً على درجة الجذر المذكور

ويؤخذ من القاعدة الثانية ان لوغارتم أي كسر يكون مساوياً للوغارتم بسطه مطروحاً منه لوغارتم مقامه وينتج من القاعدتين الاوليين أن لوغارتم الحد الرابع من متناسبة يكون مساوياً لمجموع لوغارتمي الوسطين مطروحاً منه لوغارتم الحد الأول

تنبيه ١٦٠ متى تكونت جملة لوغارتمية سهل الانتقال منها الى جملة اخرى لانه اذا رمزنا بالرمز ح لاساس الجملة الاولى وبالرمز ى لاساس الجملة الثانية ... لوغارتم ... عدد كا عدد ح بالنسبة للجملة التي اساسها ى ...

هـ ...

ا بفرض ح [illegible] $= $ [illegible]

ويطلق على العدد الثابت الذي تحسب به جملة لوغارتمات اسم أساس هذه الجملة

بند ١٦٨ اذا فرض أن ص و ص′ و ص″ ... ص$_{ن}$ رموز الأعداد و س و س′ و س″ ... س$_{ن}$ رموز لوغارتمات هذه الأعداد بالنسبة لجملة أساسها ح فيكون

$$ص = ح^{س} ، ص' = ح^{س'} ، ص'' = ح^{س''} ، \frac{ص}{ص'} = ح^{س-س'} ، ص^{م} = ح^{م س}$$

$$\sqrt[م]{ص} = ح^{\frac{س}{م}}$$

ومن هنا يؤخذ بمقتضى قاعدة الأس

$$ص ص' ص'' ... ص_{ن} = ح^{س+س'+س''+ ... +س_{ن}}$$

ومنها يحدث

$$لو (ص ص' ص'') = س + س' + س'' ، \quad لو \frac{ص}{ص'} = س - س' ، \quad لو ص^{م} = م س$$

و لو $\sqrt[م]{ص} = \frac{س}{م}$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

وذلك اذا كان الأس دون الوحدة كانت لوغارتمات
الأعداد التي تقرب من الوحدة سالبة ولوغارتمات الأعداد
التي فوق الوحدة موجبة ولوغارتم الصفر ... ـ
١١ حيث أن اللوغارتمات لا تتغير إلا باختلاف الأساس
فلا يعتبر منها غير لوغارتمات الأعداد الموجبة
ويعرض مما أن الأس يكون موجبا وبهذا لا يكون
للأعداد السالبة لوغارتمات

١٧٢ يمكن استعمال اللوغارتمات في حل معادلات مجهولة الأس
مثلا اذا وجدت معادلة

$$ح^{س} = د$$

فانه يستخرج منه بمقتضى ما تقدم (في بند ١٦٤) $س = \frac{لو د}{لو ح}$
واذا اريد حل معادلة $ح^{د^{س}} = م$
يوضع $د^{س} = ص$ فيكون $ح^{ص} = م$ وهذه يستخرج منها

[illegible] الجملة التي أساسها ح تحصل

[illegible]

[illegible] لو ى × [illegible]

ومن هذه [illegible] يلزم [illegible] لوغارتمات جميع الاعداد بالنسبة للأساس

[illegible] هذه الأعداد المنسوبة للجملة التي أساسها

[illegible] الثابتة $\frac{1}{لو ى}$ بشرط أن يكون لوغارتم ى مأخوذاً

بالنسبة للأساس ح

ويطلق على خارج قسمة $\frac{1}{لو ى}$ اسم قياس الأساس ى بالنسبة للأساس ح

نتائج يؤخذ من تعريف اللوغارتمات وما تقدم (في صفحة ١٦٥)

أولاً أن الأساس في كل جملة لوغارتمية يكون مساوياً للواحد، ويكون

لوغارتم الواحد مساوياً للصفر

وثانياً إذا كان الأساس أكبر من الواحد كانت لوغارتمات الأعداد الأكبر

من الواحد موجبة ولوغارتمات الأعداد الأدنى من الواحد سالبة ولوغارتم

الصفر $-\infty$

وثالثاً

محاذيًا للحد ١ من المتوالية الهندسية فيؤخذ حينئذ كل حد من حدود المتوالية العددية اسم لوغارتم الحد المحاذي له من المتوالية الهندسية

واللوغارتمات المكونة بهذه المثابة هي الأس المعقود للتي يرفع اليها عدد ثابت فتتكون من ذلك الاعداد التي تكون لها هذه اللوغارتمات لانه اذا رمز بالرمز ك لكمية ثابتة يمكن اعتبارها مقربة من واحد بكمية صغيرة جدًا وفرضت المتواليتان

$∺ \; ..... \; ك^{-٣} : ك^{-٢} : ك^{-١} : ١ : ك : ك^{٢} : ك^{٣} :$

$÷ \; ..... \; -٣د \; . \; -٢د \; . \; -د \; . \; صفر \; . \; د \; . \; ٢د \; . \; ٣د \; .$

فنجعل م د = ١ و $ك^{م} = ح$ فيوجد

$ك = ح^{\frac{1}{م}}$

وحينئذ تكتب المتوالية الهندسية هكذا

$∺ \; ..... \; ح^{-\frac{٣}{م}} : ح^{-\frac{٢}{م}} : ح^{-\frac{١}{م}} : ١ : ح^{\frac{١}{م}} : ح^{\frac{٢}{م}} : ح^{\frac{٣}{م}}$

ومن هنا يشاهد أن حدود هذه المتوالية هي مقادير متغير ص الناتجة من فرض المعادلة ص = $ح^{س}$ وما مقادير متغير س فانها تعبر بأعظم الحدود المختلفة من المتوالية العددية

أن $ص = \frac{لوهـ}{لوحـ}$ فاذا وضع مقدار ص فى المعادلة $د^{س} = ص$ حدث

$$س = \frac{لو(لوهـ) - لو(لوحـ)}{لود}$$

واذا اريد حل المعادلة $حـ^{س+د} - \frac{د}{حـ^{س-1}} = هـ$

يفرض أن $حـ^{س} = ع$ فيكون $حـ^{د} \times ع - \frac{حـد}{ع} = هـ$ أى $حـ^{د} ع^{2} - هـ ع = حـ د$

وهذه المعادلة الأخيرة يعلم منها مقدار المجهول ع فاذا كان لهذا المجهول

مقدار موجب تحصل مقدار س المطابق له بوضع هذا المقدار الموجب

بدل ع فى المعادلة $حـ^{س} = ع$

بند ٤٧١ قد ذكر فى علم الحساب أن نظرية اللوغارتمات ناتجة من نظرية المتواليات

ولنوضح ذلك فنقول

اذا فرضت متوالية هندسية حدها الأول ١ وأساسها كمية تختلف عن

الواحد بقليل وحدودها تأخذ فى الازدياد بمقادير صغيرة جدا بحيث تكاد تندرك

بشرط أن تكون هذه المتوالية محتوية على جميع الاعداد وفرضت أيضا

متوالية عددية حدها الأول صفر وأساسها كمية صغيرة جدا أيضا بحيث

أن هاتين المتواليتين تكونتا على وجه بحيث تكون حدود المتوالية

الثانية موضوعة تحت حدود المتوالية الاولى ويكون صفر المتوالية العددية

محاذيا

نكتب

١٠٣٤٥٦

والعلامة العشرية ...

شوهدات

١٠٣٥٦٧,٠٣ ...

= ٩٩ - ٠,٢٨٦٣ ...

وهذا التحويل يوضح ...

- الأول نعتبر ...

ثم نحول ...

أن نجري على الجزء الاعشاري ... في حالة ...

فى اللوغارتمات التى اساسها ١٠

واستعمال الجداول اللوغارتمية

تعد لوغارتمات الاعداد ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، ١٠٠٠٠ الخ فهى ١ ، ٢ ، ٣ ، ... الخ
وأما لوغارتمات الأعداد التى ليست من القوى الصحيحة للعدد ١٠ فلا يمكن
بيانها الا بوجه التقريب (كما فى ن ١٦٦) وهذه اللوغارتمات التقريبية تتعين
بعدد اعشارى واما الجزء الصحيح للوغارتم عدد اكبر من الواحد فانه يحتوى
على عدة من الآحاد مساوية لعدد ارقام هذا الجزء ناقصة واحدا لانه
اذا من لعدد ارقام الجزء الصحيح بالرمز م كان محصورا بين $10^{م-1}$ و $10^{م}$
وبناء على ذلك يكون لوغارتمه محصورا بين م-١ و م وحينئذ يكون
مركبا من آحاد عددها م-١ ومن جزء اعشارى أقل من الواحد ولذا
اطلق على الجزء الصحيح من كل لوغارتم اسم العدد البيانى

١٧٥ حيث أن الجداول اللوغارتمية لا تحتوى الا على لوغارتمات الأعداد الصحيحة
فيلزم لايجاد لوغارتم كسر ان تطبق عليه القاعدة المتقدمة (فى ن ١٦٨)
ومتى كان الكسر المفروض اقل من الواحد امكن تعيين لوغارتمه السالب على
وجه بحيث يكون جزءه الاعشارى موجبا ولذا يلزم ان يضاف بالاختيار

اللوغارتم

(٢٠٢)

خارج قسمته عليه يكون مساوياً للوغارتم هذا العدد مضافاً إليه ومطروحاً منه آحاد بعدد درجة القوة الصحيحة للعدد ١٠

ويؤخذ من ذلك أن لوغارتم العدد الاعشاري الذي يزيد عن الواحد ولوغارتم العدد الاعشاري الذي ينقص عن الواحد ويكون عدده الباقي سالباً يتحد في الجزء الاعشاري الذي هو لوغارتم العدد الصحيح المتكون بقطع النظر عن الشرطة

وحينئذ يسهل معرفة العدد الباقي للوغارتم عدد اعشاري أصغر من الواحد لانه اذا رمز بالرمز ع لعدد الأصفار الواقعة بين الشرطة واول رقم معنوي يوجد عن يمينها كان العدد المفروض أصغر من $\frac{1}{ع}$ واكبر من $\frac{1}{ع+1}$ وحينئذ يكون لوغارتم هذا العدد محصوراً بين −ع و −(ع+١) أعني أن هذا اللوغارتم يكون مساوياً −(ع+١) مضافاً إليه جزء اعشاري موجب أو أنه يكون مساوياً −ع مضافاً إليه جزء اعشاري [illegible]

نهاية

[illegible] بعدد اعشاري صغير وسحب [illegible]
كان العدد الباقي مساوياً العدد [illegible]

ويضاف الى عدده الباقى واحد لان

٢̄،٢٣٤٦٨٩٩ = −٢ − ٠،٢٣٤٦٨٩٩ = −٣ + (١ − ٠،٢٣٤٦٨٩٩)

= ٣̄،٧٦٥٣١٠١

واذا اريد ضرب اللوغارتم ٣̄،٧٦٥٣١٠١ فى عدد صحيح كالعدد ٤ مثلاً فان حاصل الضرب يكتب هكذا

٣̄،٧٦٥٣١٠١ × ٤ = −٣ × ٤ + ٠،٧٦٥٣١٠١ × ٤ أو ٩̄،٠٦١٢٤٠٤

ومتى كان لوغارتم مكوناً من عدد بيانى سالب وجزء اعشارى موجب واريد قسمته على عدد صحيح لزم أن يؤخذ خارج قسمة العدد البيانى على وجه بحيث يكون الباقى موجباً مثلاً اذا قسم ٧̄،٣٢٩٥٦٤٢ على ٣ كان خارج قسمة −٧ على ٣ هو −٢ والباقى −١ أو خارج القسمة −٣ والباقى +٢ ويتوالى العمل هكذا يحدث ٣̄،٧٧٦٥٢١٤ وهو الناتج المطلوب

بند ١٣٦ يؤخذ من القواعد المتقدمة (فى بند ١٦٨) أن

لو (ح × ١٠^م) = لو ح + لو ١٠^م = لو ح + م ن

لو (ح / ١٠^م) = لو ح − لو ١٠^م = لو ح − م

ومن هذا ينتج أن لوغارتم حاصل ضرب عدد فى القوة الصحيحة للعدد ١٠ أُسُّه

خارج

فاذا كان لوغارتم العدد الصحيح يزيد عن اكبر الاعداد التي توجد بالجدول فانه يلزم ان ينقص عن يمين هذا العدد بالشرطة عدة من الارقام بحيث يكون الباقي اكبر عدد يوجد بين التي بالجدول وحينئذ يكون هذا العدد كناية عن عشاري صحيح اذا رمز لجزئه الصحيح بالرمز د وجزئه الاعشاري بالرمز ى والجزء الاعشاري من لوغارتم العدد د بالرمز [illegible] للفرق الكائن بين لوغارتمي العددين د ، د + ١ محسوب في الجدول [illegible] حدثت المتناسبة

١ : ى :: ى' : س

التي يوجد منها ان س = ى × ى'

فينبغي ان يضم مقدار س الى ى ليتكون من ذلك جزء الاعشاري للوغارتم العدد د + ى الذي هو الجزء الاعشاري للوغارتم العدد الصحيح المعلوم واما عدده البياني فيتعين بالكيفية المتقدمة

ومتى كان العدد المفروض عددا عشاريا اكبر من الواحد او اصغر منه كان عدده البياني معلوما دائما وحيث ان جزءه الاعشاري لا يتغير اذا قطع النظر عن الشرطة في ذلك العدد المفروض فيتعين لوغارتمه بالكيفية السابقة

شرطية فى العدد المفروض

ورابعًا متى كان اللوغارتم سالبًا بالكلية كان عدد الباقى أقل بواحد من العدد الدال على مرتبة أول رقم معنوى يوجد عن يمين الشرطة فى العدد المفروض وعلى ذلك يكون العدد الباقى الموجب أو السالب للوغارتم دال على مرتبة أعظم آحاد العدد الذى ينسب اليه هذا اللوغارتم

١٧٣ تطبيق اللوغارتمات على العمليات العددية بواسطة الجداول يتوقف على حل مسئلتين

(الأولى) المعلوم عدد والمراد ايجاد لوغارتمه

(والثانية) المعلوم لوغارتم عدد والمراد ايجاد هذا العدد

تنبيه يكفى لحل المسئلة الاولى ان نذكر الجداول المستعملة فى ذلك فنقول جداول لالند وجداول رينو ومارى تحتوى على لوغارتمات الاعداد الصحيحة من ابتداء الواحد الى ١٠٠٠٠ وأما جداول كاليه فانها تحتوى على لوغارتمات هذه الأعداد من ابتداء الواحد الى ١٠٨٠٠٠ غير أنه لا يوجد بها عدد باقى لكونه يسهل ايجاده (بمقتضى بند ١٧٤) من اول وهلة

فاذا كان

ومتى كان اللوغارتم المعلوم سالبا بتمامه [illegible] لوغارتم يكون جزءه
الاعشاري موجبا ثم يجري [illegible]

١٧١ ويوجد في جداول كالية تحت عنوان [illegible] لوغارتمات
الاعداد الصحيحة من ابتداء الواحد الى [illegible] وهذه اللوغارتمات مبسوطة
[illegible] العدد [illegible]

وجدول [illegible] الوسيع يشتمل على لوغارتمات جميع الاعداد الصحيحة من
ابتداء [illegible] الى [illegible]

فاعمد [illegible] يحتوي جميع الاعداد من ابتداء [illegible]
الى [illegible] لوغارتمات [illegible]

والاعداد [illegible] بعضها تحت
بعض بحيث يكون [illegible]

والاجزاء الاعشارية [illegible]

هي الاجزاء الاعشارية [illegible] بالعدد
[illegible] الاعداد [illegible]
[illegible]

فـ اذا كان العدد المعلوم مشتملاً على اعداد صحيحة وكسور حوّلا الى كسر واحد لوغارتمه يتعين بالكيفية المتقدمة (في بند ١٦٨)

ويكفي لحل المسئلة الثانية أيضاً بحيث أن العدد البياني للوغارتم يدل دائماً على مرتبة أعظم احآد في العدد المطلوب (كما في بند ١٧٥) فلا يعتبر غير الجزء الأعشاري من اللوغارتم وأما العدد البياني فيقطع النظر عنه ثم يبحث عن العدد المطابق لهذا الجزء الاعشاري ويضرب في القوة الموافقة للعدد ١٠ أو يقسم عليها

فأما ان كان الجزء الاعشاري للوغارتم معلوم موجوداً في الجداول بالضبط فان العدد المطابق له يعلم من اول وهلة

واما ان كان لا يوجد فيها بالضبط فانه يبحث عن الجزء المقرب منه بحيث لا يزيد عنه فاذا رمز بالرمز ل للجزء المقرب منه وبالرمز ع للعدد الصحيح المطابق له وبالرمز لَ للجزء الاعشاري من اللوغارتم وبالرمز د للفرق الكائن بين لوغارتمي ع ، ع+١ وبالرمز دَ للفرق لَ - ل تحصلت المناسبة د : دَ :: ١ : س التي يعلم منها أن س = دَ/د وهذا المقدار الاعشاري يضاف الى العدد ع ليتكون عدد يكون الجزء الاعشاري للوغارتمه دالاً على جزء الاعشاري من اللوغارتم المعلوم

ومتى

من جهة الشمال أرقامه الخمسة الاول فيوصل الى ٤٦٩ ، ١٤٥١٨ وحينئذ يرى أن لوغاريتم الجزء ١٤٥١٨ هو ٠٫١٦١٩٠٦٨ وجدول الفروق الاعظم قريبا منه هو الجدول المحتوى على ٢٩٩ وفي هذا الجدول يرى أن الأعداد المطابقة للأعداد ٩٫٦٫٤ المعتبرة اعشارا هي ١٢٠ و ٢٩ و ٢٦٩ التي يؤخذ منها أن

٢٩٩ × ٤٫ = ١٢٠ ، ٠٫٠٦٨٩٩٩ = ٩٫١٧ و ٠٫٠٠٨٩٩٩ = ٢٫٦٩

وحينئذ يتحصل اللوغاريتم المطلوب بهذه الكيفية وهي بجمع هذه الأعداد الاخيرة من لوغاريتم العدد ١٤٥١٨ الاعداد ١٢٠ و ١٧٫٠ و ٢٫٦٩ وطريقة الحساب هي

لو ٠٠٠١٤٥١٨		٠٫١٦١٩٠٦٨
المقدار المنطابق مع	٠٫٤	١٢٠
المقدار المنطابق مع	٠٠٠٠٠٦	١٧٫٩
المقدار المنطابق مع	٠٠٩	٢٫٦٩
		٠٫١٦١٩٢٠٩

فاذا اردنا الآن معرفة العدد حيث يكون لوغاريتمه معلوم وفرض ان الجزء الأعشاري لهذا اللوغاريتم هو ٠٫١٦١٩٢٠٩ فانه يبحث عن لوغاريتمات اعداد الأرقام

مثلاً اذا اريد معرفة لوغارتم العدد ٢٧٧٩٦ يبحث في الصف م عن العدد ٢٧٧٩ وعلى استقامة الصف الافقى المحتوى على هذا العدد الى الصف المبين بالعدد ٦ نرى فيه الارقام الاخيرة للوغارتم المطلوب ولتعيين ارقامه الاُوَل يؤخذ العدد المنعزل الاكثر قربًا منه بالصعود الى الصف المبين بالصفر فيحدث باعتبار العدد البيانى

لو ٢٧٧٩٨ = ٤٤٤٠١٣٦ ، ٤

والفرق بين لوغارتمى عددين صحيحين متواليين يوجد فى الصف الأخير (من جهة اليمين) المبين بالرمز (فرق) المكتوب فى رأس الجدول الصغير الأكثر قربًا من هذه الاعداد لكنه يلاحظ أن هذا الفرق يدل على آحاد من المرتبة الأخيرة وتؤخذ من الجدول النسبى الكائن تحت الصف المذكور حواصل ضرب هذا الفرق فى ١ ، ٠ ، ٢ ، ٠ ، ٣ ، ٠ ، ٤ ، ٠ ، ٥ ، ٠ ، ٦ ، ٠ ، ٧ ، ٠ ، ٨ ، ٠ ، ٩ ، ٠

ومن هنا ينتج بالسهولة حاصل ضرب هذا الفرق فى أى كسر اعشارى وحينئذ يمكن بواسطة هذا الجدول الاستغناء عن اجراء العمليات الناتجة من المناسبة المتقدمة

مثلاً اذا اريد معرفة لوغارتم العدد ١٤٥١٨٤٦٩ لزم ان تفصل عنه

باشرطة

المتمم الرقمي للوغارتم هو العدد الذي اذا اضيف اليه كان الحاصل ١٠ ومن هنا سند ١٧٨
يؤخذ أن المتمم الرقمي للوغارتم يتحصل من طرحه من ١٠ وذلك بطرح اول رقم
يوجد عن يمينه من ١٠ وطرح باقي أرقامه من ٩

والمتمم الرقمي يستعمل دائماً لاجتناب اللوغارتمات السالبة ولايجاد باقي حاصل جمع مطروحاً منه عدة لوغارتمات بواسطة عمليات جمع وذلك بأن تؤخذ المتممات الرقمية للوغارتمات التي يراد طرحها وتضاف الى اللوغارتمات الاخرى وحيث أنه يشاهد بالسهولة أن حاصل الجمع يزيد عن الحاصل المطلوب عشرات بعدد المتممات الرقمية فيلزم لتحصيل الناتج الحقيقي أن تطرح هذه العشرات من حاصل الجمع وهذه العملية لا تجرى الا على الجزء الصحيح وحده.

امثلة حسابية محلولة باللوغارتم

المثال الاول اذا اريد ايجاد النتيجة المبينة بالمقدار

$$س = \frac{٥٤٣ \times ٨٢٧ \times ٢٣٩}{١٧ \times ٧٦}$$ تجرى العمل هكذا

لوغا ٢٣٩ = ٢,٣٧٨٣٩٧٩
لوغا ٨٢٧ = ٢,٩١٧٥٠٥٥
لوغا ٥٤٣ = ٢,٧٣٤٧٩٩٨
متمم لوغا ٧٦ = ٨,١١٩١٨٦٤
متمم لوغا ١٧ = ٨,٧٦٩٥٥١١
لوغا س = ٤,٩١٩٤٤٠٧

الأربعة الكائنة في الصف المبين بالصفر عن اللوغاريتم الأعظم قريبا من اللوغاريتم
المعلوم بدون أن يزيد عنه ويؤخذ العدد المطابق له وهو ١٤٥١ وبالسلوك
على استقامة الصف الأفقي المذكور يشاهد العدد الذي يقرب كل القرب
من ٩٢٠٩ المتكون من الأرقام الأربعة الأخيرة التي يتركب منها اللوغاريتم
وهذا العدد هو ٩٠٦٨ الذي يوجد في الصف المبين بالعدد ٨ وحينئذ
يكون الفرق بين ٩٠٦٨ و ٩٢٠٩ هو ١٤١ ثم يبحث في جدول الفروق
عن العدد الذي يقرب من ١٤١ ولا يزيد عنه فيرى أنه ١٢٠ وهو المطابق
للعدد ٠٫٤ وحيث أن الفرق بين ١٢٠ و ١٤١ هو ٢١ فيضرب هذا
الأخير في ١٠ ويبحث عن العدد الأقرب من حاصل الضرب وهو ٢١٠
فيشاهد أنه ٢٠٩ وهو المناسب للعدد ٠٫٧ ويتوالى العمل هكذا يرى أن
العدد المطلوب هو ١٤١٥٨٫٤٧ وذلك بقطع النظر عن مرتبة أعظم
الآحاد وكيفية وضع العملية هي

لو س = ٪١٦١٩٢٠٩

والعدد المطابق	٪١٦١٩٠٦٨	هو ١٤٥١٨
والعدد المطابق للباقي الأول	١٤١	هو ٠٫٤
والعدد المطابق للباقي الثاني	٢١	هو ٠٫٧

تكفيه بتسعة عشر أحد وعشرين لوغارتم العدد ٢ مقربًا من رقمين أو ثلاثة أرقام عشرية لأن جداول الكتاب تشتمل زيادة عن الجزئين الأولين على جداول تمام الأعداد من ابتداء الواحد إلى ١٠٠٠٠ محسوبة بعشرين من الأرقام العشرية وحينئذ يحسب لوغارتم $(٢)^{٦٤}$ مقربًا بأقل من واحد من المرتبة الرابعة ومن هنا ينتج مقدار مضبوط للعدد المطلوب وحينئذ نحسبه كما يأتي

لو ٢ = ٠٫٣٠١٠٢٩٩٩٥

٦٤ لو ٢ = ١٩٫٢٦٥٩١٩٧

$٢^{٦٤}$ = ١٨٤٤٦٧٤٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠

ولنا مثال ثالث إذا أريد حساب المقدار $\left(\frac{٢٫٣}{٤١٧}\right)^{\frac{٣}{٥}}$ فنجري كما يلي

لو ٢٫٣ = ٠٫٣٦١٧٢٧٨

تمم لو ٤١٧ = ٣٫٣٧٩٨٦٣٩

لو $\frac{٢٫٣}{٤١٧}$ = $\bar{٣}$٫٧٤١٥٩١٧

٣ لو $\frac{٢٫٣}{٤١٧}$ = $\bar{٧}$٫٢٢٤٧٧٥١

$\frac{٣}{٥}$ لو $\frac{٢٫٣}{٤١٧}$ = $\bar{٢}$٫٦٤٤٩٥٥٠ أي يكون $\left(\frac{٢٫٣}{٤١٧}\right)^{\frac{٣}{٥}}$ = [illegible]

والعدد البياني ١ للوغارتم $\left(\frac{٢٫٣}{٤١٧}\right)^{\frac{٣}{٥}}$ يدل على أن المرتبة الأولى لآحاد العدد

العدد مطابق ٩٠ ٩١٩٤٣٩٠ ..... هو ٨٣٠٦٩

باقى أول ٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٧ ...... هو ٢٫

باقى ثانى ١ ... . ٠ هو ٠٫٠١

س = ٨٣٠٦٩٫٣٢

وبإجراء عملية حسابية على هذا القدر يحدث س = ٨٣٠٦٩٫٣٣٣

وحينئذ لا يؤخذ من استعمال اللوغارتمات غير الارقام الستة الاول من هذا العدد فاذا لم يستعمل المتمم الرقمى فانه يلزم أن يستعمل لذلك بدل عملية الجمع جمعان وطرح واحد

(المثال الثانى) اذا اريد حساب 2^{64} يجرى العمل هكذا

لوغا ٢ = ٠٠٣٠١٠٣٠٠٫

٦٤ × لوغا ٢ = ١٩٫٢٦٥٩٢٠٠

2^{64} ١٨٤٤٦٧٥ ....٠٠

ولما كان يمكن وقوع خطأ فى حاصل ضرب ٢ × ٦٤ هو بالتقريب فى ٣٢ من آحاد المرتبة السابعة وكان الفرق بين لوغارتمى العددين ١٨٤٤٦ و ١٨٤٤٧ هو ٢٣٦ آحادا من هذه المرتبة أمكن أن يكون مقدار الخطأ الواقع فى العدد المطلوب $\frac{32}{236}$ من واحد من خامس الأرقام بالابتداء من الشمال ومن هنا يعلم أنه لم يتحقق غير الأرقام الخمسة الاول

مبلغ

لكن

م = (ج − ح) / (د لَ) ، لَ = (ج − ح) / (ح م) ، ح = ج / (١ + لَ م)

وهذه القوانين الأربعة يؤخذ منها حل جميع المسائل المتعلقة بالأرباح البسيطة

فأما القانون الأخير فيعلم منه المقدار المتحصل عنه ج الذي لا يدفع

الا في المدة لَ من السنين لان المبلغ ح هو الذي يلزم استعماله في هذه

المدة ليتحصل في اخرها ج وأما مقدار ح المأخوذ من هذا القانون

فهو المبلغ الذي يمكن تحصيله من صراف استعمله في تجر رأس ماله ج ولا يدفع

الا في المدة لَ من السنين وأما الفرق ج − ح وهو المحجوز في صندوق

الصراف فانه يعرف بالفائدة الداخلة للمبلغ ج وهذه الفائدة هي

المساوية لربح المبلغ ح في المدة لَ السنوية التي يدفع فيها المبلغ ح

وأما الفائدة الخارجة للمبلغ ج التي هي ربح هذا المبلغ في المدة المذكورة

فهي لَ م ج ، ومن هنا يعلم انه لا يتحصل من المال الذي قدره ج دائما

فيه من الفائدة الخارجة غير ج (١ − لَ م)

١٨٠ ب ويقال للربح مركبا اذا كان رب المال لا يأخذ ربح ماله في كل سنة بل

يضمه الى الأصل ويتركه بين يدى مقترضه مع رأس المال مدة هذا الزمن

فيكون رأس المال في آخر السنة الأولى

ج = ح (١ + م)

المطلوب هو مرتبة العشرات فاذا اريد تحصيل الناتج مقربًا من ٠٫٠٠٠١ فانه يكفي لذلك تحصيل خمسة ارقام وذلك بقطع النظر عن استعمال الاجزاء المتناسبة

المثال الرابع) اذا اريد حل المعادلة $(١٫٠٠١٢٥)^{س} = ٠٫٨٩٦٢٥$ فباجراء العمل يحدث

$$س = \frac{لو(٠٫٨٩٦٢٥)}{لو(١٫٠٠١٢٥)} = -٨٧٫٦٨٨١$$

في الربح البسيط والمركب

نمرة ١٢٩ اللوغارتمات تستعمل ايضًا في حل المسائل المتعلقة بربح النقود مثلًا اذا جعل ر رمزًا لربح الفرنك الواحد في السنة الواحدة فيكون ربح ١٠٠ف في هذه المدة ١٠٠ر وبناء على ذلك يكون ربح المبلغ ح في السنة الواحدة ح ر ويكون ربحه في مدة صحيحة أو كسرية من السنين مبينًا بالرمز ك هو ك × ح ر وبالجملة اذا جعل جـ رمزًا لما يؤول اليه المبلغ ح في المدة ك من السنين حدث

$$جـ = ح (١ + ك ر)$$ ومن هنا يؤخذ

$$ر =$$

الباقي تحت يد المقترض مدة م سنة

$$ح(1+ر)^{م}$$

ويكون المبلغ ء في مدة م−1 سنة

$$ء(1+ر)^{م-1}$$

ويكون المبلغ هـ في مدة م−2 سنة

$$هـ(1+ر)^{م-1}$$ وهلم جرا

وحينئذ يكون المبلغ الأخير في مدة سنة واحدة

$$ل(1+ر)$$

ويتأتى من ذلك أن يتحصل

$$ج = ح(1+ر)^{م} + ء(1+ر)^{م-1} + هـ(1+ر)^{م-2} + \cdots + ل(1+ر)$$

فاذا فرض أن ح = ء = هـ = ... = ل فان الطرف الثاني من هذه المعادلة يؤول الى متوالية هندسية حدها الاول ح(1+ر) وأساسها (1+ر) وحينئذ يتحصل ([illegible])

$$ج = \frac{ح(1+ر)\left[(1+ر)^{م} - 1\right]}{ر}$$

والدفعة السنوية هي المبلغ الذي يتكفل بدفعه المقترض في كل سنة ليستوفي رب المال رأس ماله بأرباحه في مدة معينة من الزمن فاذا

ويكون المبلغ $ج'$ في آخر السنة الثانية

$$ج'' = ج'(1+ر) = ج(1+ر)^{2}$$

ويكون المبلغ $ج''$ في آخر السنة الثالثة

$$ج''' = ج''(1+ر) = ج(1+ر)^{3}$$.

وبالاستمرار هكذا الى سنوات عددها ن يكون المبلغ الأصلي ج في

آخر السنة ن

$$ج_{ن} = ج(1+ر)^{ن}$$

وبتطبيق اللوغارتم على هذا القانون يحصل

$$لو\ ج_{ن} = لو\ ج + ن \times لو\ (1+ر)$$

وحينئذ تحصل بمقتضى هذا القانون واحدة من الكميات الاربع وهي

$ج_{ن}$ ، ج ، ر ، ن اذا علمت الثلاث الاخرى منها .

بند ١٨١ اذا فرض أن رب المال أضاف في كل سنة الى رأس ماله مبلغاً جديداً لا تزال تحصل عنه ارباح مركبة الى أن يستولاه من المقترض وجعلت ج، و، هـ ول رموزاً للمبالغ التي يضعها في مبادئ السنة الاولى والثانية والثالثة والرابعة ونحو، و $ج_{ن}$ رمزاً للمبلغ الذي يحصل في آخر السنة ن فيكون المبلغ

$$(ح - جـ ر)(١ + ر)^{م} = ح \quad \text{التي ينتج منها} \quad (١ + ر)^{م} = \frac{ح}{ح - جـ ر}$$

ومن هنا يجدث

$$م = \frac{لو ح - لو (ح - جـ ر)}{لو (١ + ر)}$$

فاذا اريد المقارنة بين مقادير عدة مبالغ مدفوعة في ازمنة مختلفة فانه يلزم ان تكون هذه المبالغ منسوبة الى زمن واحد كما حصل في المسئلة السابقة مثلاً اذا فرض ان صرافاً استلم مبلغاً قدره ح ولزم ان يدفعه بعد مدة من السنين عددها م نظير استخلاص هذا الصراف ويلزم انه يدفع لرب المبلغ المذكور شيأ قيمته ء يكون مدفوعاً مدة من السنين عددها ع واذا بحث عما يؤول اليه المبلغان ح و ء بعد انقضاء المدة تحصل

$$\frac{ح}{(١ + ر)^{م}} \quad و \quad \frac{ء}{(١ + ر)^{ع}}$$

لان المبلغ الاول مثلاً يعتبر كمقدار اصلي لرأس مال يؤول الى ح بعد مدة سنين عددها م وينتج من ذلك انه اذا اخذ الفاضل بين الكسرين المذكورين كان هذا الفاضل سواء كان موجباً أو سالباً كناية عما يدفعه الصراف أو يستلمه في مقابلة الاستبدال واذا فرض ان هذا الفاضل لا يمكن دفعه بعد مدة من السنين قدرها ك وجعل هـ رمزاً

جعل م رمزاً لرأس المال الذي يقتضي دفعه لربه و ح رمزاً للمبلغ الذي يدفع سنوياً في مدة من السنين عددها ن فانه يمكن أن تعتبر الدفعات التي يدفعها المقترض قبل انقضاء المدة كقرضة على رب المال فيكون لمقدارها تعلق بالزمن الذي مضى من الابتداء الى انقضاء المدة المذكورة وحينئذ تكون الدفعة الاولى التي استلمها رب المال قبل انقضاء المدة بسنين عددها $ن-١$ مساوية $ح(١+ر)^{ن-١}$ والدفعة الثانية مساوية $ح(١+ر)^{ن-٢}$ وهكذا الى الدفعة الأخيرة المساوية ح فقط وقد سبق أن المال المقترض عن ربه المبين بالرمز م يكون ربحه مدة ن سنة مساوياً $م(١+ر)^{ن}$

وحينئذ يحدث

$$م(١+ر)^{ن} = ح(١+ر)^{ن-١} + ح(١+ر)^{ن-٢} + \ldots\ldots + ح$$

وهذه المعادلة تؤول الى

$$م(١+ر)^{ن} = \frac{ح\left[(١+ر)^{ن}-١\right]}{ر}$$

وهذه المعادلة تؤخذ منها واحدة من الكميات الاربع متى علم منها ثلاث فاما تعيين مقدار ر فانه يتعلق بحل معادلة درجتها ن واما مقدار ن فانه يستخرج من المعادلة

$(ح-م ر)$

[illegible] لا يجوز

[illegible]

مختلفة مركبة [illegible]

[illegible]

[illegible] ترتيب هذه [illegible]

[illegible] ابجد [illegible] توفيق [illegible]

[illegible] مختلفة [illegible] تشتمل على حروف [illegible]

[illegible] حروف [illegible]

حروف هذه حادثة مركبة [illegible]

[illegible]

[illegible] حروف ثلاثة

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] حروف

(٦٩ ن)

لمقداره عند الاستحقاق كان عندنا بعد المدة ك مساويا ه $(١+ر)^{ك}$

ومكافئتها الحالية

$$\left[\left(\frac{ح}{(١+ر)^{٢}}\right) - \frac{د}{(١+ر)^{٣}}\right](١+ر)^{ك} = د(١+ر)^{ك-٢} \; د(١+ر)^{ك-٣}$$

الباب السابع

في التوفيق والترتيب والتبادل ونظرية نيوتون

ن ١٨٣ التوافيق لحروف عددها م أو الحواصل ضربها المختلفة التي كل واحد منها يشتمل على حروف عددها ح هي الحواصل الحادثة من كتابة هذه الحروف بجوار بعضها على وجه بحيث يكون كل توفيق مشتملا على حروف عددها ح من غير أن يتكرر اثنان من هذه التوافيق

مثلا التوافيق أو حواصل الضرب المختلفة المركبة من الحروف الأربعة

ح ، د ، ه ، و ومثنى هي

حد ، حه ، حو

ده ، دو

هو

فيشاهد من هنا انه يلزم لتركيب هذه الحواصل المختلفة ان تكتب الحرف ح

بجوار

نبذ ٢٨٩ ولبيان الكيفية التى بها يعلم عدد التراتيب لحروف عددها م أو لحواصل ضربها المركبة من حروف عددها د والتباديل لحروف عددها م أو الحواصل المختلفة لحروف عددها م كل واحد منها مشتمل على حروف عددها د يقال

حيث أنه يلزم لتكوين التراتيب لحروف عددها م مثنى أن تكتب على التوالى بجوار كل واحد منها الحروف الباقية التى عددها م -١ فيكون عدد التراتيب لحروف عددها م مثنى هو م (م-١)

وحيث انه يلزم لتكوين التراتيب لحروف عددها م ثلاث أن يكتب بجوار كل من تراتيب هذه الحروف مثنى كل من الحروف الباقية التى عددها م -٢ فيكون عدد التراتيب لحروف عددها م ثلاث هو م (م-١) (م-٢) لانه يحدث من كل من تراتيب الحروف المذكورة مثنى ترتيب ثلاثية عددها م -٢ وحيث أن عدد التراتيب مثنى هو م (م-١) فيكون م (م-١) (م-٢) دالا على عدد التراتيب ثلاث وبمقتضى ما تقدم يكون عدد التراتيب لحروف عددها م رباع هو

م (م-١) (م-٢) (م-٣)

عددها م من الحروف التي عددها م بجوار بعضها وتغيير سائر أوضاع الحروف ومن هنا يؤخذ أنه اذا وكبت تباديل كل من التوافيق لحروف عددها م أو كل من حواصل ضربها التي كل واحد منها مشتمل على حروف عددها م حدث من ذلك التراتيب لحروف عددها م أو حواصل ضربها التي كل واحد منها مشتمل على حروف عددها م مثلاً التراتيب أو حواصل الضرب المختلفة المركبة من الحروف الأربعة ح ، د ، هـ ، و مثنى هي

حد ، دح ، حهـ ، هـح ، حو ، وح ، دهـ ، هـد ، دو ، ود ، هـو ، وهـ

والتراتيب أو حواصل الضرب المختلفة المركبة من الحروف الأربعة المذكورة ثلاث هي

ح د هـ	ح د و	ح هـ و	د هـ و
ح هـ د	ح و د	ح و هـ	د و هـ
هـ ح د	و ح د	و ح هـ	و د هـ
د ح هـ	د ح و	هـ ح و	هـ د و
د هـ ح	د و ح	هـ و ح	هـ و د
هـ د ح	و د ح	و هـ ح	و هـ د

ولايجاد عدد التوافيق أو الخواص المختلفة [illegible] م كل واحد منها [illegible]

مشتمل على حروف عددها م يرمز لهذا العدد بالرمز [illegible] و [illegible] بالرمز ت

لعدد تراتيب حروف عددها م أو الخواص جميعها التي كل واحد منها مشتمل

على حروف عددها م ثم بالرمز ن لعدد [illegible] حروف عددها م

وحيث أنه يرى بالبداهة أنه إذا كانت [illegible] أو الخواص المختلفة

[illegible] عددها م [illegible] عددها م فحص

[illegible]

[illegible] حروف عددها م وذلك بأن يجري على [illegible]

[illegible] سائر [illegible] حروف عددها م وحينئذ يكون عدد [illegible]

مساويًا لعدد [illegible] مضروبًا في عدد التوافيق أي ت = ن × ق

ومن هنا [illegible] كل [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] س + ح [illegible]

وبناءً عليه يكون عدد تراتيب حروف ... م أو عدد ما يمكن تكوينه من التراتيب التي كل

واحد منها مشتمل على حروف عددها م مساوياً في العموم

م (م - ١) (م - ٢) (م - ٣) (م - ٤) .... [م - (ح - ١)]

فاذا فرض أن م = ح فان التراتيب تتحول الى تباديل يكون عددها مساوياً

ح (ح - ١) (ح - ٢) (ح - ٣) ..... × ٣ × ٢ × ١ واذا قُلب الوضع

حدث ١ × ٢ × ٣ × ٤ .... (ح - ٣) (ح - ٢) (ح - ١) وهذا هو المقدار

المساوي لعدد تباديل حروف عددها ح

ويمكن ايضاً تحصيل هذا المقدار الاخير بدون التفات الى القانون الدال على

عدد التراتيب بأن يقال حيث أنه يحصل من الحرفين ح ، د التباديل

ح د ، د ح وانه يكفي لتكوين تباديل ثلاثة حروف أن يكتب بعد كل من

هذه الحروف تباديل الحرفين الاخيرين فيكون عدد التباديل لحروف

عددها ٣ هو ٢ × ٣ وحيث انه يلزم لتكوين تباديل اربعة حروف

ان يكتب بعد كل من هذه الحروف تباديل الحروف الثلاثة الباقية فيكون عدد

التباديل لهذه الحروف الاربعة هو ٢ × ٣ × ٤ وبالتوالي هكذا يكون

عدد تباديل حروف عددها ح مبيناً بالكمية ١ × ٢ × ٣ × ٤ .... × ح

$$(\text{س}+\text{ح})(\text{س}+\text{ى}) = \text{س}^2 + \left.\begin{array}{l}\text{ح}\\+\text{ى}\end{array}\right| \text{س} + \text{ح ى}$$

$$(\text{س}+\text{ح})(\text{س}+\text{ى})(\text{س}+\text{ه}) = \text{س}^3 + \left.\begin{array}{l}\text{ح}\\+\text{ى}\\+\text{ه}\end{array}\right| \text{س}^2 + \left.\begin{array}{l}\text{ح ى}\\+\text{ح ه}\\+\text{ى ه}\end{array}\right| \text{س} + \text{ح ى ه}$$

$$(\text{س}+\text{ح})(\text{س}+\text{ى})(\text{س}+\text{ه})(\text{س}+\text{و}) = \text{س}^4 + \left.\begin{array}{l}\text{ح}\\+\text{ى}\\+\text{ه}\\+\text{و}\end{array}\right| \text{س}^3 + \left.\begin{array}{l}\text{ح ى}\\+\text{ح ه}\\+\text{ى ه}\\+\text{ح و}\\+\text{ى و}\\+\text{ه و}\end{array}\right| \text{س}^2 + \left.\begin{array}{l}\text{ح ى ه}\\+\text{ح ى و}\\+\text{ح ه و}\\+\text{ى ه و}\end{array}\right| \text{س} + \text{ح ى ه و}$$

وبهذه الحواصل الجزئية يشاهد فيها أن الحرف س يأخذ في [illegible]

[illegible] الابتداء من الحد الاول الذي اسه [illegible]

الى الحد الاخير الذي اسه معدوم وان معكوس الحد الثاني يكون [illegible]
الحدود الثانية في الكميات ذات الحدين وان معكوس الحد الثالث يكون [illegible]
مجموع حواصل ضرب الحدود الثانية المذكورة مثنى وهكذا الى الحد الاخير

بالبحث من قاعدة هذه القوى الصحيحة الى قانون به تتحصل أى قوة. هذا القانون هو الذى يعرف بقانون نوتون لكونه هو الذى استكشفه فاذا حسبت بواسطة عملية الضرب قوى س + ح بالابتداء من القوة الثانية حدث

$$(س+ح)^{2} = س^{2} + 2حس + ح^{2}$$

$$(س+ح)^{3} = س^{3} + 3حس^{2} + 3ح^{2}س + ح^{3}$$

$$(س+ح)^{4} = س^{4} + 4حس^{3} + 6ح^{2}س^{2} + 4ح^{3}س + ح^{4}$$

وحينئذ يشاهد فى هذه القوى المختلفة أن قاعدة أسس الحرفين س , ح تعلم بداهة غير أنه لا يمكن معرفة القاعدة التى بموجبها تتكون المكررات الرقمية وحيث أنه يلزم لتوضيح تركيب الحواصل أن نكتب الارتباطات التى تتولد منها المكررات فيكفى لذلك أن نجرى على الكميات ذات الحدين المختلفة من بعضها بالحد الثانى عملية الضرب بهذه المثابة

س^م + ا س^{م-١} + ب س^{م-٢} + ... + ن س^{م-ن} + ... + ن | س
+ ح | + ح ب | + ح ل | ... + ح ن_{م-١} | + ح ل_م

ومن هنا يعلم أن قانون الاس المفروضة للمجهول س لم يتغير وأما قانون المكررات فمنه يتبين أن مكرر الحد الاول يكون دائما مساويا للواحد ومكرر الحد الثاني مكونا من مجموع الحدود الثانية للجيات من ذوات الحدين عددها م + ١ ومكرر الحد الثالث مكونا من مجموع حواصل ضرب مركبة من الحدود الثانية للجيات من ذوات الحدين عددها م ومأخوذة ثنتين مضافا اليها مجموع هذه الحدود الثانية مضروبا في ب ومن ذلك يتكون مجموع حواصل ضرب مختلفة مركبة من الحدود الثانية للجيات من ذوات الحدين عددها م + ١ ومأخوذة مثنى ومكرر الحد الرابع مكونا من مجموع حواصل ضرب مركبة من الحدود الثانية للجيات من ذوات الحدين عددها م ومأخوذة ثلاث مضافا اليه مجموع حواصل ضرب مركبة من هذه الحدود الثانية مأخوذة مثنى ومضروبة في ل ومن ذلك يتكون مجموع حواصل ضرب مختلفة مركبة من الحدود الثانية للجيات من ذوات الحدين عددها م + ١ ومأخوذة ثلاث وهلم جرا وحينئذ يكون الحد الاخير مساويا

[illegible] حاصل [illegible] مذكورة في بعض

ويمكن جعل هذا القانون [illegible] أن هذا القانون مطرد

[illegible] ضرب كميات [illegible] ذات الحدين عددها م (بجعل م رمز العدد

[illegible] موجب) كان هذا القانون مطرداً أيضاً في حاصل ضرب كميات من ذوات

[illegible] عددها م + ١

مثلاً [illegible] تكوين حاصل ضرب [illegible] عددها م هكذا

س + ح [illegible] بالرمز ل١ مجموع [illegible]

الثانية من الكميات ذات [illegible] وبالرمز [illegible] مجموع [illegible]

المختلفة المركبة من هذه الحدود الثانية المأخوذة مثنى وبالرمز ل٢ مجموع

حواصل ضربها ثلاث ثلاث وهكذا ثم بالرمز لم لحاصل ضرب جميع هذه الحدود

الثانية ويفرض أن حاصل ضرب الكميات ذات الحدين هو

$$س^{م} + ل_{١} س^{م-١} + ل_{٢} س^{م-٢} + ل_{٣} س^{م-٣} + \ldots\ldots + ل_{م}$$

فاذا ضربت هذه الكمية الكثيرة الحدود في كمية جديدة من ذوات الحدين

هي كمية س + ع تحصل من عملية الضرب هذا الحاصل

ثم نأخذ وبنا ... ونريد ...

$$(س+ح)^م = س^م + م س^{م-١} ح + \frac{م(م-١)}{١×٢} س^{م-٢} ح^٢ + \frac{م(م-١)(م-٢)}{١×٢×٣} س^{م-٣} ح^٣$$

$$\ldots + ح^م$$

بند ١٨٨ فاذا جعلنا $ح_{ن+١}$ رمزاً للحد الذي رتبته ن + ١ في الطرف الثاني من القانون المتقدم أعني رمزاً للحد المسبوق بحدود عددها ن فانه يحدث

$$ح_{ن+١} = \frac{م(م-١)(م-٢)(م-٣)\ldots(م-ن+١)}{١×٢×٣×٤\ldots ن} ح^ن س^{م-ن}$$

وهذا المقدار هو المعروف بالحد العمومي لقوة الكمية $(س+ح)^م$ لانه يمكن بواسطته استنتاج جميع الحدود بالابتداء من الحد الثاني بتعويض ن في هذا المقدار على التوالي

ن = ١ ، = ٢ ، = ٣ ، = ...

مثلاً اذا اريد ايجاد الحد الخامس من القوة التاسعة عشر للكمية س + ح فرضنا بعد اجراء ما تقدم م = ١٩ ، ن = ٤ ووجب ان يكون م − ن + ١ = ١٦ وحينئذ

فيؤخذ من القانون المتقدم

$$\frac{١٩×١٨×١٧×١٦}{١×٢×٣×٤} ح^٤ س^{١٥} = ٣٨٧٦ ح^٤ س^{١٥}$$ وهو الحد المطلوب

بند ١٨٩ ويؤخذ من تحليل الكمية $(ح+س)^م$ انه يمكن تحصيل مكرر اي حد

لحاصل ضرب عدد ... ثانية للكميات ... بضرب الحد من ... ه مضروبًا

في ل وبناءً على ذلك يكون هذا الحاصل كافية من حاصل ضرب الحد ود الثانية

للكميات من دون تحديد عددها م + ١ ومن هنا يؤخذ اذا كان انه القانون

السابق متحققًا في حاصل ضرب مضاريب عددها م كان مطردًا

في حاصل ضرب مضاريب عددها م + ١ وحيث انه محقق في حاصل ضرب

مضروبين فيكون مطردًا في حواصل ضرب جملة مضاريب

فاذا فرض الآن أن كلاً من الحد ود الثانية للكميات ذات الحدين المضروبة تنبيه ١٨٧

في بعضها مساوٍ للحد ح فان حاصل الضرب وهو

(س + ح) (س + ى) (س + هـ) .... (س + ك) يؤول الى القوة الميمية للكمية س + ح

ويكون المكرر ح١ للحد الثاني من هذا الحاصل مساويًا للحد ح مكررًا بقدر

م الذي هو عدد المضاريب أعني م ح والمكرر ح٢ للحد الثالث مساويًا

للحد ح٢ مكررًا بقدر عدد حواصل ضرب مختلفة مكونة من حروف عددها

م ومأخوذة مثنى أعني $\frac{م(م-١)ح^٢}{١ × ٢}$ والمكرر ح٣ للحد الرابع مساويًا

للحد ح٣ مكررًا بقدر عدد حواصل ضرب مختلفة مكونة من حروف عددها

م ومأخوذة ثلاث أعني $\frac{م(م-١)(م-٢)}{١ × ٢ × ٣}$ ح٣ وهلم جرا فاذًا يكون

وبهذه الكيفية يرى أن القوة السابعة للكمية س + ح هى

$$س^{٧} + ٧ ح س^{٦} + ٢١ ح^{٢} س^{٥} + ٣٥ ح^{٣} س^{٤} + ٣٥ ح^{٤} س^{٣} + ٢١ ح^{٥} س^{٢} + ٧ ح^{٦} س + ح^{٧} .$$

١٩٠ يلزم أن تكون حدود تحليل الكمية $(س + ح)^{م}$ التى على ابعاد متساوية
من الحدين المتطرفين متحدة فى المكررات

ولذا يقال اولاً كما تقدم أن الحد المسبوق بحدود عددها ح يكون

$$ح_{ح+١} = \frac{م(م-١)(م-٢)\ldots(م-ح+١)}{١ \times ٢ \times ٣ \times \ldots \times ح} ح^{ح} س^{م-ح}$$

وحيث أن تحليل الكمية $(س + ح)^{م}$ مركب من حدود عددها م + ١ فيكون

الحد [illegible] بحدود عددها ح مسبوقا بحدود عددها [illegible]

إذا [illegible] م [illegible] ح [illegible]

نحصل

$$ح_{م-ح+١} = \frac{م(م-١)(م-٢)\ldots(ح+١)}{١ \times ٢ \times ٣ \ldots (م-ح)}$$

ويمكن أن يفرض أن الحد $ح_{ح+١}$ يكون [illegible]

أن ح يكون أصغر من م - ح وبمقتضى [illegible]

هكذا

$$\frac{م(م-١)(م-٢)\ldots(م-ح+١)(م-ح)\ldots}{١ \times ٢ \times ٣ \ldots ح \times \ldots (م-ح)}$$

بواسطة ضرب مكرر الحد السابق عليه في الاس الذي يوجد به المجهول س في هذا الحد السابق وقسمة حاصل الضرب على الاس الذي يوجد به ح في الحد المذكور بشرط أن يضاف لهذا الاس واحد أو بقسمة المكرر المذكور على عدد الحدود السابقة على الحد المطلوب واما الأسس فانها تتغير عن اصلها بمعنى أن اس المجهول س يتناقص عن اصله واحدًا فواحدًا من حد الى تاليه واس ح يتزايد عن اصله واحدًا فواحدًا

ويكفي للبرهنة على هذا القانون بوجه تام ان يفرض انه يراد تحصيل الحد المسبوق بحد وعددها ح-١ وذلك بأن يغير الحد ح بالحد ح+١ في المقدار $ع_{ح+1}$ فيحدث

$$ع_{ح+1} = \frac{م(م-1)(م-2)\cdots(م-ح+1)(م-ح)}{1\times2\times3\times\cdots\times ح\times(ح+1)}\,ح^{ح+1}\,س^{م-ح-1}$$

وحينئذٍ يمكن بمقتضى منطوق القانون المذكور استنتاج الحد $ع_{ح+2}$ من الحد $ع_{ح+1}$ ويمكن بواسطة هذا القانون تكوين جميع حدود قوة الكمية $(س+ح)^م$ بالابتداء من الحد الأول $س^م$ ومن هنا يعلم أن عملية التحليل تكون قد انتهت متى تحصل الحد $ح^م$ لان اس المجهول س الذي يلزم ان يضرب فيه الحد $ح^م$ ليتحصل من ذلك الحد التالي له ليس الا صفرًا

$(س+ح)^{م}$ وحينئذ يكون تحليل هذه الكمية محتويًا مع الحد ك $ح^{ق}$ $س^{م-ق}$ على حد آخر لا يختلف عن ذلك الحد الا بكون الحرف ح وضع فيه بدل الحرف س و س بدل ح وهو بناء على ذلك كناية عن ك $س^{ق}$ $ح^{م-ق}$ المتبوع بحدود عددها م ومن البديهي بمقتضى قانون اسس المجهول س في تحليل الكمية $(س+ح)^{م}$ أن الحد ك $س^{ق}$ $ح^{م-ق}$ يكون متبوعًا بحدود عددها م وحينئذ يكون مكرر الحد المتبوع بحروف عددها م عين مكرر الحد المسبوق بحدود عددها م .

١٩١ ولتحصيل تحليل الكمية $(س-ح)^{م}$ يكفي ان يوضع ـ ح بدل ح في تحليل هذه الكمية فتكون الحدود الزوجية المرتبة التي يرى فيها ان ح مرفوع الى قوى فردية المرتبة مسبوق بالعلامة ـ والحدود الفردية المرتبة باقية على حالها وحينئذ يحدث

$$(س-ح)^{م} = س^{م} - م ح س^{م-1} + \frac{م(م-1)}{1 \times 2} ح^{2} س^{م-2} - \frac{م(م-1)(م-2)}{1 \times 2 \times 3} ح^{3} س^{م-3} + \ldots$$

١٩٢ واذا فرض في تحليل الكمية $(س+ح)^{م}$ أن ... يحدث ... أن مجموع مكررات تحليل هذه ... الحدين المتطرفين

ومن هنا يشاهد أن حدي هذا المكرر يشتملان على مضاريب ه الاعداد
الصحيحة من ح + ١ الى م − ح فاذا حذفت المضاريب المشتركة كان
مقدار المكرر ${}^{ح}_{م-ح+١}$ عين مقدار المكرر ${}^{ح}_{ح+١}$
وثانياً أن مكرر الحد المسبوق بحدود عددها ح يكون كناية عن عدد حواصل
ضرب مختلفة مركبة من حروف عددها م ومأخوذة نوناً نوناً ومكرر
الحد المسبوق بحدود عددها م − ح كناية عن حواصل ضرب مختلفة
بحروف عددها م ومأخوذة بمقدار م − ح لكن اذا تكونت
الحواصل المركبة من حروف عددها م نوناً نوناً تحصل من ذلك حواصل
مركبة من الحروف التي عددها م المذكورة ومأخوذة بمقدار م − ح
وذلك بأن يقسم بالتوالي حاصل ضرب هذه الحروف على كل من الحواصل
المأخوذة نوناً نوناً وحينئذ يكون عدد حواصل الضرب المأخوذة بمقدار
م − ح مساوياً لعدد الحواصل المأخوذة نوناً نوناً
وثالثاً اذا جعل ك رمزاً للمكرر الحد المسبوق بحدود عددها ح فان
هذا الحد يكون كناية عن ك ح ^{ح} س${}^{م-ح}$ وحيث أن الكمية ذات الحدين
س + ح لا تتغير بتغيير وضعي الحرفين س , ح فلا يحصل تغير في تحليل الكمية
(س + ح)م

[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]

فاذا فرض مثل ذلك في تحليل الكمية $(س - ح)^{م}$ شوهد أن مجموع مكررات الحدود الفردية المرتبة يساوي مجموع مكررات الحدود الزوجية المرتبة

بند ١٩٣ ويمكن لتحليل قوة أي كمية ذات حدين ان يبدأ بتحليل قوة درجتها كدرجة تلك القوة للكمية $س + ح$ أو $س - ح$ ثم يستعوض الحرفان س ، ح بحدي الكمية ذات الحدين المفروضة وحينئذ يلزم لتحصيل تحليل الكمية $(٢ س^{٣} - ٣ ح ص)^{٥}$ ان يبدأ بتحصيل تحليل الكمية $(س - ح)^{٥}$ وهو

$$س^{٥} - ٥ ح س^{٤} + ١٠ ح^{٢} س^{٣} - ١٠ ح^{٣} س^{٢} + ٥ ح^{٤} س - ح^{٥}$$

ثم يوضع $٢ س^{٣}$ بدل س ، $٣ ح ص$ بدل ح فيحدث

$$(٢ س^{٣} - ٣ ح ص)^{٥} = ٣٢ س^{١٥} - ٢٤٠ ح ص س^{١٢} + ٧٢٠ ح^{٢} ص^{٢} س^{٩} - ١٠٨٠ ح^{٣} ص^{٣} س^{٦}$$
$$+ ٨١٠ ح^{٤} ص^{٤} س^{٣} - ٢٤٣ ح^{٥} ص^{٥}$$

ويمكن وضع هذه العملية هكذا

	$\frac{٥}{١}$	$\frac{٤}{٢}$	$\frac{٣}{٣}$	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{١}{٥}$
١	٥	١٠	١٠	٥	١
$٣٢ س^{١٥}$	$١٦ س^{١٢}$	$٨ س^{٩}$	$٤ س^{٦}$	$٢ س^{٣}$	١
١	$٣ ح ص$	$٩ ح^{٢} ص^{٢}$	$٢٧ ح^{٣} ص^{٣}$	$٨١ ح^{٤} ص^{٤}$	$٢٤٣ ح^{٥} ص^{٥}$

$$٣٢ س^{١٥} - ٢٤٠ ح ص س^{١٢} + ٧٢٠ ح^{٢} ص^{٢} س^{٩} - ١٠٨٠ ح^{٣} ص^{٣} س^{٦} + ٨١٠ ح^{٤} ص^{٤} س^{٣} - ٢٤٣ ح^{٥} ص^{٥}$$

فاما العنصر الاول فهو مكون من جملة كسور بسوطها اعداد صحيحة آخذة

في التناقص

لكنه يلزم قبل الشروع في ... بيان ... به ليسهل ... و ...

بها يحصل اي جذر لكمية كثيرة الحدود

فاذا اريد استخراج الجذر التكعيبي لكمية كثيرة الحدود كمية

س^٦ − ٣٦ ح س^٥ + ٦٦٦ ح^٢ س^٤ − ٦٦٣ ح^٣ س^٣ + ٣٣ ح^٤ س^٢ − ٩ ح^٥ س + ح^٦

يجب ... الكمية الكثيرة الحدود مرتبة حسب درجات متنازلة

للحرف س ... مضاعفها و ... تكعيبي

يؤخذ من ذلك ... بحسب الدرجات المتنازلة للحرف

س كان الحد الاول من هذه ... حدود كانه عن مكعب حد الاول

من الجذر وحينئذ يلزم ... جذر ... حد تكعيبي

الاول ٨ س^٦ وهو ...

فاذا جعل ل رمز المجموع ... الاول ورمز للكمية

الكثيرة الحدود المعلومة ...

مج = ل س + ... ^٣

وبناء على ذلك يكون

ع − ٨ س^٦ = − ٣٦ ح س^٥ + ٦٦ ح س^٤ ... = ... ^٣ ... س^٣ ...

لمقدارين التخيليين $\text{ل} + \text{ء}\sqrt{-1}$ و $\text{ل} - \text{ء}\sqrt{-1}$ ونوحظ ما تقرر في

شأن قوى $\sqrt{-1}$ تحصل القانونان

$$(\text{ل} + \text{ء}\sqrt{-1})^{\text{م}} = \begin{cases} \text{ل}^{\text{م}} + \frac{\text{م}(\text{م}-1)}{1\times2}\text{ل}^{\text{م}-2}\text{ء}^{2} + \frac{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)(\text{م}-3)}{1\times2\times3\times4}\text{ل}^{\text{م}-4}\text{ء}^{4} + \dots \\ + \left[\text{م}\,\text{ل}^{\text{م}-1} - \frac{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)}{1\times2\times3}\text{ل}^{\text{م}-3}\text{ء}^{2} + \dots\right]\text{ء}\sqrt{-1} \end{cases}$$ و

$$(\text{ل} - \text{ء}\sqrt{-1})^{\text{م}} = \begin{cases} \text{ل}^{\text{م}} - \frac{\text{م}(\text{م}-1)}{1\times2}\text{ل}^{\text{م}-2}\text{ء}^{2} + \frac{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)(\text{م}-3)}{1\times2\times3\times4}\text{ل}^{\text{م}-4}\text{ء}^{4} - \dots \\ - \left[\text{م}\,\text{ل}^{\text{م}-1} - \frac{\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)}{1\times2\times3}\text{ل}^{\text{م}-2}\text{ء}^{2} + \dots\right]\text{ء}\sqrt{-1} \end{cases}$$

في استخراج جذور الكميات الكثيرة الحدود

١٩٥ قد شوهد في علم الحساب أن كيفية تركيب مربع مجموع عددين ومكعبه توصل الى القواعد المتعلقة باستخراج كل من الجذر التربيعي والتكعيبي للاعداد ويمكن أن تكون معرفة الحدين الاولين $\text{س}^{\text{م}} + \text{م}\,\text{ح}\,\text{س}^{\text{م}-1}$ من تحليل الكمية $(\text{س} + \text{ح})^{\text{م}}$ معدة لتكوين الطرق التي ينبغي اتباعها في استخراج جذور الاعداد على أي وجه كانت درجتها وبذلك يتوصل الى قواعد مشابهة للقواعد التي تستعمل في استخراج كل من الجذر التربيعي والتكعيبي ولما كانت هذه القواعد نادرة الاستعمال وجب علينا هنا ان نعرض عن ذكرها ونتصدى لذكر استخراج جذور الكميات الحرفية

[illegible] فالامر [illegible] حيث ان [illegible]

[illegible] من الباقى على ٣ [illegible] خص حد ثالث من [illegible]

[illegible] الباقى الاول ثلاثة

[illegible] مضروبا في [illegible] اضافة اليه [illegible] مثال

[illegible] مربع الحد [illegible] اضافة اليه مكعب حد

[illegible]

[illegible] مركب من المضروبين [illegible]

[illegible] ثم يضرب المجموع في الحد [illegible]

[illegible] الثاني وهو

[illegible]

[illegible] الحد الاول من هذا الباقى على [illegible]

[illegible] الجذر

[illegible]

[illegible]

[illegible] الاجزاء الثلاثة [illegible]

وهذه [illegible] ٣٦ [illegible]

كناية عن حاصل ضرب [illegible] [illegible] وتحليلها [illegible]

في ٣ × [illegible] لان [illegible] المجهول [illegible] الكمية ل [illegible]

[illegible] ل ل [illegible] ومن هنا يوجد انه [illegible]

[illegible] اعني الثلاثة [illegible] الحد الاول من الجذر [illegible]

[illegible]

[illegible] النظر عن الحدين [illegible]

[illegible]

ع = (ن - ٣ ح س + ل)٣ = [illegible] ٣ (ن - ٣ ح س) ل [illegible]

(ن - ٣ ح س) ل × ل٣

ومن هنا ينتج

ع - (ن - ٣ ح س)٣ = ل × [٣ (ن - ٣ ح س)٢ + ٣ (ن - ٣ ح س) [illegible]

وهذه المتساوية يؤخذ منها انه اذا طرح من الكمية الكبيرة [illegible]

[illegible] ن - ٣ ح س من الجذر [illegible] الحد الاول من [illegible]

ضرب الحد الاول من الكمية ل في ٣ × [illegible] الاخير [illegible]

١٢ ش٦ − ٣٦ هـ ش٥ + ٦٦ هـ٢ ش٤ − ٦٣ هـ٣ ش٣ + ٣٣ هـ٤ ش٢ − ٩ هـ٥ ش + هـ٦

+ ٣٦ هـ ش٥ ... هـ٢ ش٤

الباقي الثاني

ش٦ − ٩ هـ٥ ش + هـ٦

ش٦ ... + ٩ هـ٥ ش − هـ٦

الباقي الثالث

٢ ش٣ − ٣ هـ ش + هـ٣

٣ (٢ ش٢)٢ = ١٢ ش٤

٣ (٢ ش٢)٢ × ٣ هـ ش + (− ٣ هـ ش)٢ (− ٣ هـ ش) = ١٢ ش٤ − ١٨ هـ ش٣ + ٩ هـ٢ ش٢

مضروباً في ٢ ش٣ − ٣ هـ ش

حاصل الضرب ٣٦ هـ ش٥ + ... ش٤ ...

٣ (٢ ش٣ − ٣ هـ ش)٢ = ١٢ ش٦ − ٣٦ هـ ش٤ + ٢٧ هـ٢ ش٢

+ ٦٦ هـ ش٤ − ٩ هـ٣ ش٣

٣ (٢ ش٣ − ٣ هـ ش) هـ٤ =

+ هـ٤

٨ (هـ٢)٣ =

المجموع ١٢ ش٦ − ٣٦ هـ ش٤ + ٢٢ هـ٢ ش٣ − ٩ هـ٤ ش + هـ٦

مضروباً في

حاصل الضرب ١٢ هـ ش٦ − ٣٦ هـ ش٥ + ٢٢ هـ٣ ش٣ − ٩ هـ٥ ش + هـ٦

(٢ - ١)

الاخيرة أن يضاف الى ثلاثة امثال مربع ٢س٢ - ٣حس حاصل الضرب المركب من ثلاثة امثال ٢س٢ - ٣حس ن + ن٢ ومربع + ن٢ ويضرب هذا الحاصل في + ن وطرحه من الباقي الثاني يكون الباقي صفراً وحينئذ يكون ٢س٢ - ٣حس + ن٢ هو الجذر التكعيبي للكمية الكثيرة الحدود المفروضة

كان حد محتوى على المتغير [illegible]

[illegible]

[illegible]

المتغير س [illegible]

[illegible] وهو [illegible]

[illegible] المتغير س [illegible]

[illegible] يكون [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] كانت الكمية [illegible]

[illegible] التصاعدية لحرف س [illegible]

في قاعدة

ويلزم لاستخراج الجذر التربيعي لكمية كثيرة الحدود كالكمية ٤ أن ترتب

حدود الكمية بحسب الدرجات التنازلية او التصاعدية لحرف واحد

[illegible] الكمية التي نهاية يمكن تحصيل جذر [illegible]

كالكمية [illegible]

حيث أن الكمية الكثيرة الحدود هي كناية عن حاصل ضرب مركب [illegible]

مساوية للجذر المطلوب عددها م فاذا كانت هذه الكمية [illegible]

كلاهما مرتب بحسب الدرجات التنازلية للحرف س فالحد الاول

من الكمية هي يكون كناية عن حاصل ضرب مركب من مضاريب [illegible]

كل منها مساوٍ للحد الأول من الجذر وبناءً على ذلك يكون الحد الاول من الجذر

هو الجذر الميمي للحد الاول من الكمية الكثيرة الحدود هذه

ولاجتناب التكرار نعرض انه قد تحصل جملة من حدود الجذر [illegible]

غير معرفة الكيفية التي تستعمل لتحصيل الحد التالي للحد المذكور ولهذا

نجعل ح رمزاً لمجموع الحدود المتحصلة و ى رمزاً للباقي حدود الجذر فيكون

$ن = (ح + ى)^م$ ومن هنا يحدث بجعل ن رمزاً للباقي $ن - ح^م$

$$ن - ح^م = م ح^{م-١} ى + \frac{م(م-١)}{١×٢} ح^{م-٢} ى^٢ + الخ$$

فاذا جعل ل رمزاً للحد الاول من الجذر و ى رمزاً للحد [illegible]

على اعظم اس للتغير س أعني للحد الذي يراد أن يبحث عنه الآن [illegible]

كان [illegible]

د ضرب في العدد م كانت نتيجة ضربه في هذا العدد صفراً من [illegible]

حرف في الحد الأخير من كثيرة الحدود

وإذا كانت كثيرة الحدود مرتبة حسب الدرجات متصاعدة

نحو الأس فعمليات القسمة تكون [illegible] متناهية متى كان الجذر

محتوياً على حد مشتمل على الحرف المذكور بأس إذا ضرب في العدد م كانت

حاصل ضربه في هذا العدد أكبر في الحد الأخير من كثيرة الحدود

وإذا كانت مرتبة كثيرة الحدود المفروضة بالأسس متصاعدة حرفاً ورقى

فعمليات القسمة تكون أيضاً غير متناهية إذا كان الحد الأول من الباقي

المتحصل لا يقبل القسمة على القوة التي درجتها م من الحد الأول من الجذر

المفروض في م

وإذا لم يكن الحد الأول من كثيرة الحدود المفروضة قوة صحيحة درجتها م

فلا يمكن بيان الجذر الذي كثيرة الحدود هذه [illegible] منطقة [illegible]

[illegible] نعلم أن [illegible] بين حدي الجذر الأول بوضعه

تحت علامة [illegible] أو بواسطة الأسس الكسرية

ويمكن أيضاً ضرب كثيرة الحدود في مضروب [illegible] المضروب [illegible] حيث يؤدي

الجذر التربيعي لحدها الاول فيحصل الحد الاول من جذرها ثم يقسم حدها الثاني على القوة التي درجتها (م-١) للحد الاول من الجذر مضروبه في م فيحصل الحد الثاني من هذا الجذر ثم تطرح من الكمية الكثيرة الحدود في القوة المبينة لمجموع حدي الجذر المتحصلين ويقسم الحد الاول من الباقي على القوة التي درجتها (م-١) للحد الاول من الجذر مضروبة في م فيحصل الحد الثالث من هذا الجذر وهلم جرا

ويشاهد بالسهولة اذا كانت الكمية الكثيرة الحدود المفروضة قوة مبينة صحيحة ان هذه العمليات توصل الى باق معدوم وكذلك اذا كانت هذه العمليات توصل الى باق معدوم فان الكمية الكثيرة الحدود المفروضة تكون قوة مبينة صحيحة ويكون مجموع الحدود المتحصلة بهذه المثابة هو الجذر المطلوب لكثيرة الحدود المفروضة

ويشاهد ايضا بمقتضى براهين مشابهة للبراهين المعروفة في شأن الجذر التربيعي (ن ٥٩) انه اذا كانت الكمية الكثيرة الحدود المفروضة مرتبة بحسب الدرجات التنازلية للحرف الاصلي فلا شك أن العملية تكون غير منتهية متى كان الجذر محتويا على حد مشتمل على الحرف المذكور بأس

اذا ضرب

ند ١٩٩ وبمقتضى هذه القاعدة يمكن تكوين مكررات نقوى متوالية حدية
س + ص كما في هذا الجدول

١	١	١	١	١	١	١	١	١	...
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	...	
١	٣	٦	١٠	١٥	٢١	٢٨	...		
١	٤	١٠	٢٠	[illegible]	[illegible]	[illegible]			
١	٥	١٥	٣٥	٧٠	[illegible]				
١	٦	٢١	٥٦	...					
١	٧	٢٨	...						
١	[illegible]	[illegible]							
١	[illegible]								

فأما الصف الاول الرأسي من هذا الجدول فهو مكرر [illegible]
واما الثاني فهو مكون من العدد ١ مكررا [illegible]
الثالث فانه يحدث بهذه الكيفية وهو أن [illegible]
الثاني العدد الحادث من اضافة الحد الذى فوقه [illegible]

الا ... التي قوة ميمية ... الكثيرة الحدود والمتحصلة من عملية الضرب

جذر ميمي كالجذر ع كان الجذر الميمي كثيرة الحدود والمفروضة ع/م ح

في الاعداد المشكلة أي التي على صورة الاشكال الهندسية وفي معرفة الاكوام المنتظمة من الكلل

بند ١٩٨ يوجد بين مكررات قوتين متواليتين للكمية س+ح ارتباطات تستنبط منها عدة قواعد لا بأس بمعرفتها

مثلاً اذا فرض أن القوة الميمية للكمية س+ح هي

$$\text{س}^{\text{م}} + \text{ج}_{١}\,\text{ح}\,\text{س}^{\text{م}-١} + \text{ء}_{١}\,\text{ح}^{٢}\,\text{س}^{\text{م}-٢} + \text{هـ}_{١}\,\text{ح}^{٣}\,\text{س}^{\text{م}-٣} + \text{الخ}$$

وضربت هذه الكمية الكثيرة الحدود في س+ح كان حاصل الضرب هو

$$\text{س}^{\text{م}+١} + \text{ج}_{١}\,\text{ح}\,\text{س}^{\text{م}} + \text{ء}_{١}\,\text{ح}^{٢}\,\text{س}^{\text{م}-١} + \text{هـ}_{١}\,\text{ح}^{٣}\,\text{س}^{\text{م}-٢} + \ldots\ldots \text{الخ}$$

$$\text{ح}\,\text{س}^{\text{م}} + \text{ج}_{١}\,\text{ح}^{٢}\,\text{س}^{\text{م}-١} + \text{ء}_{١}\,\text{ح}^{٣}\,\text{س}^{\text{م}-٢} + \ldots\ldots \text{الخ}$$

ومن هنا يؤخذ أنه يكفي لتحصيل أي حد من القوة التي درجتها (م+١) للكمية س+ح أن يضاف الى مكرر الحد الذي عن رتبته في القوة الميمية مكرر الحد السابق عليه

بند ١٩٩

٥ ، ٢ والأخير من هذين العددين وهو ٢٠ مكون من ١٠ ، ١٠ والعدد الأخير من هذين العددين وهو ١٠ هو مجموع ٦ و ٤ ، ٥ و ٤ هو مجموع العددين ٣ و ١ وحينئذ يكون ٥٦ = ٢١ + ١٥ + ١٠ + ٦ + ٣ + ١

بند ٢٠١ القاعدة المتقدمة (في بند ١٩٨) المستعملة أساساً للتكوين المثلث الحسابي والخاصية المذكورة في البند السابق يمكن استنباطهما بالسهولة من نظرية التوافيق لأنه قد شوهد أن مكرر الحد الذي درجته (م + ١) من القوة التي درجتها (م + ١) للكمية س + ص يساوي عدد توافيق قدرها م + ١ من الحروف التي كل حاصل ضرب مكون منها مشتمل على حروف عددها م وحيث أن هذه التوافيق تعتبر مركبة من جزئين أحدهما التوافيق التي لا تحتوي على واحد من الحروف كالحرف ح مثلاً وهذه ...١ عين عدد التوافيق م المركبة من الحروف التي كل واحد من حواصل ضربها مشتمل على حروف عددها م وثانيهما التوافيق المحتوية على الحرف ح التي عددها عين عدد التوافيق م المركبة من الحروف التي كل واحد من حواصل ضربها مشتمل على حروف عددها م - ١ فيتحصل بملاحظة ما تقدم في (بند ١٨٤)

من الصف الثالث يكون ١+٠ أى ١ وحده الثانى ١+١ أى ٢ وحده الثالث ٠+١ أى ١ وأما الصف الرابع فانه يتكون من الثالث كما أن الثالث تكون من الثانى وهلم جرا وحيث أن الحدين الاولين من الصف الثانى يمكن اعتبارها كمكررى القوة الاولى للكمية س+ح فتستنبط من ذلك القاعدة المتقدمة وهى أن حدود الصف الثالث تكون مكررات لتحليل الكمية (س+ح)^٢ ومكررات الصف الرابع تكون مكررات لتحليل الكمية (س+ح)^٣ وهكذا

ويطلق على هذا الجدول الذى يمكن تطويله الى غير نهاية اسم المثلث الحسابى للعلم پاسكال

بيد وبمقتضى تركيب المثلث الحسابى يشاهد بالسهولة أن الحد الذى رتبته ع من أى صف افقى هو عبارة عن مجموع الحدود الاول التى عددها ع من الصف الافقى السابق عليه لانه اذا لوحظ الحد ٥٦ وهو الحد السادس من الصف الرابع يشاهد أنه مكون من ضم العددين ٢١ , ٣٥ الى بعضهما وهذان العددان يوجدان على يمين الحد المذكور فى الصف الثالث والرابع والثانى من العددين المذكورين وهو ٣٥ هو مجموع الحدين

[illegible]

[illegible] [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

(م + ق = م + (م) م-١ ....(١)

وهذه صورة يبرهن بها على القاعدة المتقدمة (ف ١٩٨)

ويلزم برهنة نظرية التوافيق على أن الحد الذى رتبته

ع من صف أفقى من المثلث يكون مساويًا لمجموع الحدود الأولى

التى عددها ع من الصف الأفقى السابق عليه إن ينبه على أن الحد الأول

من الصف الأفقى الذى رتبته (ح+١) من المثلث الحسابى يكون موجودًا

فى الصف الرأسى الذى رتبته (ح+١) ومن هنا يعلم أن الحد الذى رتبته

ع من الصف الأفقى الذى رتبته (ح+ع) يكون موجودًا فى الصف

الرأسى الذى رتبته (ح+ع) ثم إنه يكون واحدًا من مكررات تحليل

الكمية (س+ص)^(ح+ع-١) وحينئذ يكون مكرر الحد الذى رتبته (ح+١)

من هذا التحليل لأنه ينحصر فى الصف الأفقى المرتبة (ح+١) وبناءً على

ذلك يكون هذا الحد كناية عن عدد التوافيق ح+ع-١ المركبة من

حروف التى كل واحد من حواصل ضربها مشتمل على حروف عددها ح

أو (ح+ع-١)ح

إذا تقرر هذا نضع فى القانون (١) ح+ع-١ بدل م نحصل من ذلك القانون

(ح+ع-١)ح =

حدود التي الصف أن تنحصر [illegible]

والثاني على كلتين والثالث على ثلاث [illegible]

التي وضعت بها القطارات ومن كيفية وضع الصفوف الافقية بالنسبة الى

بعضها ان اعداد الكل التي توجد في الصفوف مختلفة هي الاعداد من [illegible]

١ ، ١+٢ ، ١+٢+٣ ، ١+٢+٣+٤ [illegible]

وهذه الاعداد هي المكونة للصف الثالث من المثلث [illegible] وهي الاعداد [illegible]

ونأتي [illegible] من عدد كل حد [illegible]

كل الكرة [illegible]

[illegible]

يجعل [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

شكلا مسمى بالاعداد الهرمية المثلثية وسيأتي بيان هذه التسمية

ومقتضى ما ذكر يكون مجموع الاعداد المتكافئة الاول التي عددها ع ورتبتها ح مساويا للعدد الذي درجته ع ومرتبته ح+١ وهذا العدد هو ناتج متحصل من القانون المتقدم (في ١٨٥) في شأن عدد التوافيق التي كل واحد منها حاصل ضرب مشتمل على حروف عددها ح بالنسبة للحروف التي عددها م فاذا وضع في هذا القانون ع+ح و ح+١ بدل م تحصل

$$\frac{ع(ع+1)(ع+2)\cdots\cdots(ع+ح)}{1\times2\times3\cdots\cdots(ح+1)}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ويلزم لتعيين مجموع الاعداد الاول المعتادة ١، ٢، ٣، ....، ع ان يجعل ح = ١ في القانون (٢) فيكون $\frac{ع(ع+1)}{2}$ هو المجموع المطلوب وهذا موافق لما تقدم في المتواليات العددية

تنبيه ٢ الكوام للكلل مركبة من جملة صفوف افقية مكيفة الوضع بحيث تكون كلل كل صف موجودة فوق اخلية كلل الصف التالي له من الجهة السفلى وجميع الكلل متماسة ومتحدة في العيار

وفي الكوم المثلثي مبني على صورة هرم مثلثي قاعدته مثلث متساوي الاضلاع يكون كل صف مكونا من جملة قطارات من الكلل بحيث يرى عند الابتداء من

احد

والذي [illegible] ويكون [illegible] من

المكرر ويكون [illegible] موضوع

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

يكون [illegible]

[illegible]

وهذا مجموع [illegible]

[illegible]

والاخذ بالمقدار [illegible]

هذا لكون في [illegible]

[illegible]

وبهذه الطريقة مقدار [illegible] موجود في كل صورة هرم [illegible]

اخرى [illegible] يكون بين [illegible] صورة هرمين [illegible] .

[illegible] بمقتضى [illegible] وجميع أشكال [illegible] عبارة عن حص [illegible] [illegible] وواحدها على كل حد منها [illegible] وطلب [illegible] كل حد منها م أو يعني عدد [illegible] رتبته م هو $\frac{م(م+1)}{2}$ وهذا المقدار اذا وضع فيه م-1 بدل م يحصل $\frac{(م-1)م}{2}$ ولا يخفى ان مجموع هذين المقدارين يساوى $م^2$ .. ومن هذه [illegible] يؤخذ ان المجموع المتقدم $1+2^2+3^2+\dots+ع^2$ يساوى المجموع المكون من حدود [illegible] تتركب منها متسلسلة الاعداد المثلثية مضافا اليه المجموع المكون من حدود [illegible] عددها ع-1 تتركب منها هذه المتسلسلة وحيث تقدم أن المجموع المكون من الاعداد الاول التي عددها ع يساوى $\frac{ع(ع+1)(ع+2)}{1\times2\times3}$ فاذا وضع في هذا المقدار ع-1 بدل ع يحصل $\frac{(ع-1)ع(ع+1)}{1\times2\times3}$ واذا اضيف هذان المقداران الى بعضهما يحصل عدد كل الكوم المربعي وهو

$$\frac{ع(ع+1)(2ع+1)}{1\times2\times3} \dots (4)$$

والكوم

[illegible] لان هذه الاخيرة لما كانت [illegible] اولية [illegible] كانت
لا تقبل القسمة الا على نفسها وعلى الواحد قيل للكيتين أو نسبين معاً اذا كان لا يوجد لهما
كية صحيحة تقسم كل واحدة منهما قسمة بلا باق غير الواحد مثلاً
الكيتان [illegible] أوليتان معاً لان الكية الاولى
لا تقبل القسمة الا على [illegible] والثانية لا تقبل القسمة الا على
[illegible]

ونظريات الكيات الجبرية الاولية مماثلة لنظريات الاعداد الاولية
التي سبق بيانها ولنقتصر على ذكرها فقط ـــــ

النظرية [illegible]

كل كية أولية [illegible] تقسم حاصل ضرب [illegible] الأوليتين
معاً تقسم واحدة منهما

وقد سبق برهان هذه النظرية في [illegible]
[illegible] فاذا فرض أن هذه [illegible]
[illegible] يوجد من ذلك اربع حالات نذكرها على الترتيب فنقول ـــــ

[illegible] الاعداد المكونة للمثلث حسابي
[illegible] ايضا وجميع مثلثات
[illegible] الاعداد متتالية معروفة بالاعداد
[illegible] الاعداد [illegible] مجموع عدة حدود متوالية من متسلسلة
[illegible] واحد وبالجملة نظرية هذه الاعداد
[illegible] لان اسهامه نظرية

[illegible]

[illegible] في نظرية القاسم المشترك الاعظم

وفي [illegible] معلومها الاولية

[illegible] التركيبات الجبرية المنطقة التي لا تحتوي على [illegible] الكمية صحيحة أو غير قابلة للقسمة على أخرى حسب ما يكون [illegible] الكمية الاولى على الثانية كمية صحيحة أو غير صحيحة والكمية الصحيحة التي لا تقبل القسمة الا على نفسها أو على الواحد تسمى كمية أولية مثل كمية [illegible] أولية وكذلك الكمية ذات الحدود الثلاثة

في

... مربعة ... وقد ... مربع ... + ... كمية ثنائية ... جـ

حيث أن حدود الأخرى ... = ب + جـ ... وضعنا كمية ب مكونة

كمية وكان ب = ب + ب حدث

جـ ب = (جـ + جـ)(ب + ب) = جـ ب + جـ ب + جـ ب + جـ ب

وحيث أن حدود ثلاثة لا يوجد لها عامل مشترك القسمة على الكمية

ع التي تنقسم بمقتضى معروف المسألة الحاصل جـ ب فيلزم أنها تقسم جـ ب

ومن هنا يؤخذ أنها تقسم جميع حدود جـ ب فإذا فرضنا حد ... كناية

عن حدود الكميتين جـ و ب اللتين يدخل فيهما س بأعلى أس وأن

الحد ... داخل في الحاصل جـ ب حيث لا يمكن اختصاره مع أي حد

من هذا الحاصل فإنه يكون غير قابل للقسمة على الكمية ع لأن هذه الكمية

لا تنقسم بمقتضى الغرض كلتا الكميتين ... وحينئذ لا يمكن أن الكمية ع

تقسم الحاصل جـ ب بدون أن تقسم كلا من جـ و ب

الحالة الثالثة

إذا كانت الكمية جـ محتوية على حرف س والكمية ب مبينة بعدد أو كمية

[illegible]

وكانت [illegible]

يعرض ان

[illegible]

يجعل [illegible] اعداد صحيحة فاذا ضربت الكمية ج

في [illegible]

[illegible] + الخ

وحيث [illegible] يقبل القسمة على العدد ع فيلزم ان [illegible]

[illegible] وبناء على ذلك اذا كان العدد

الاولى [illegible] من الاعداد [illegible]

فاذا [illegible] الكمية [illegible]

يلزم ان [illegible]

[illegible]

اذا كانت الكميتان ج ، د محتويتين على الحرف س وكانت الكمية ع مبينة

بعدد يفرض ان العدد ع لا يقسم كلتا الكميتين ج ، د فاذا جعل ج

رمزا

[illegible]

[illegible]

[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]

[illegible]

[illegible]
[illegible]

وحيث أن الطرف الأول من هذه المساواة يقبل القسمة على ج فيلزم أن يكون حاصل ضرب ه ك قابلاً للقسمة على هذه الكمية ولكن حيث أن ه كمية أولية غير محتوية على ب فلا تكون قابلة للقسمة على هذا العدد وحينئذ يكون ك قابلاً للقسمة على ج [illegible] وإن لم يكن كذلك كان حاصل الضرب ه ك غير قابل للقسمة على ج (كما في الحالة الثانية) فإذا جعل ك' رمزاً لخارج قسمة ك على ج فإنه يحدث

ج ب ب' خ' = ه ك'

ويمكن البرهنة بمثل ذلك على أن ك' يقبل القسمة على ج لأنه إذا جعل ك'' رمزاً لخارج القسمة تحصل

ج ب' خ'' = ه ك''

ويتوالى العمل إلى أن يكون الطرف الأول محتوياً على ج يتوصل إلى المتساوية

= ج

ويؤخذ من هذه المتساوية أن الكمية ٤ التي تقسم حاصل جـ ب تقسم أيضا

الحاصل جـ أ

وإذا كانت الكمية جـ أولية أيضا فإنه يلزم أن تقسم عليها الكمية ٤ ويؤخذ

من ذلك متساوية جديدة مشابهة للمتساويتين المتقدمتين هي

م ٤ = جـ أ + هـ التي يؤخذ منها م = (جـ أ + هـ) / ٤

وهذه المتساوية الأخيرة يؤخذ منها أن الكمية ٤ التي تقسم حاصل جـ ب

تقسم أيضا الحاصل جـ أ

ويتوالى العمل هكذا إلى ... بالضرورة إلى باقي عددي كان ... لأنه لا يمكن

مباشرة [illegible]

[illegible]

[illegible]

وإذا كانت [illegible]

ذلك [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

وزيادة على ذلك يكون جَ دالاً على كمية صحيحة لأن م جَ ، ط كَ كميتان
صحيحتان فاذا ضرب طرفا المتساوية المذكورة في أ ثم قسما على ط حدث

$$\text{م}\,\frac{\text{جَ أ كُ}}{\text{ط}} = \text{أ ك} + \frac{\text{جَ أ}}{\text{ط}}$$

ومن هذه المتساوية الأخيرة يؤخذ ان الكمية ط التي تقسم الحاصل ج أ
تقسم ايضاً الحاصل جَ أ .

واذا فرض أن جَ كمية جبرية وقسمت الكمية ط على الكمية جَ فانه
يتوصل الى باق درجته دون درجة جَ ويجعل مَ رمزاً للعدد الذي
يلزم ضرب هذا الخارج فيه لاجل حذف ما به من المقامات و كَ رمزاً
للكمية الكثيرة الحدود الصحيحة الحادثة من عملية الضرب و جً رمزاً
لحاصل الحادث من ضرب مَ في باقي القسمة ايضاً يحصل

$$\text{مَ ط} = \text{جَ كً} + \text{جً}$$

ولا ينعدم جً لانه لو انعدم للزم ان يكون مَ ط قابلاً للقسمة على كل
مضروب جبري أوّل من مضاريب جَ وهذا محال وزيادة على ذلك يكون
جً دالاً على كمية صحيحة لان مَ ط و جَ كً كميتان صحيحتان
فاذا ضرب طرفا المتساوية الأخيرة في أ ثم قسما على ط حدث

$$\text{مَ أ} = \frac{\text{جَ أ كً}}{\text{ط}} + \frac{\text{جً أ}}{\text{ط}}$$

ويؤخذ

[illegible]

[illegible]

[illegible] متحركة [illegible]

[illegible] وحدة منها

[illegible] الاقتصار [illegible] تقتضي [illegible]

[illegible] فاصل [illegible] ولذلك [illegible] فاصل [illegible]

[illegible] لا انقسام [illegible] وحينئذ يلزم ان يكون

فاصل [illegible] واحد [illegible]

[illegible] انقسام [illegible] فاذا صدق [illegible]

[illegible] يلزم [illegible] على [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

وقالت [illegible]

[illegible]

[illegible]

هذا [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] لا [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] عجيب

[illegible]

[illegible] كثيرا عجيب

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] الأعرابي

[illegible] الأعظم

[illegible] الأعرابي عجيب

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] والقاسم

[illegible] الأعظم [illegible] هو حق والنار!! [illegible] الأعظم

صحيحة

صحيحة مستقدمة ببرهان يعادل سهولة على أن الجذر في درجة زوجية لا يمكن أن يكون كمية كسرية وهذه البرهنة لا تختلف عن مستقدمة في شأن الاعداد الصحيحة (١٢٩)

في القاسم المشترك الأعظم بين
عدة كميات جبرية صحيحة

بند ١٣٠ يطلق اسم القاسم المشترك الأعظم بين عدة كميات جبرية صحيحة على حاصل ضرب جميع المضاريب الأولية العددية او الحرفية المشتركة بين هذه الكميات

بند ١٣١ ويؤخذ من هذا التعريف أن القاسم المشترك الأعظم بين عدة حدود يتحصل بهذه الكيفية وهي أنه يبحث عن القاسم المشترك الأعظم بين مكوراتها العددية ويكتب عقب هذا العدد كل حرف مشترك بين جميع الحدود بأصغر أس له وحينئذ يلزم لايجاد القاسم المشترك الأعظم بين الحدود ٤٣٢ هـ٤ د٤ ش٥ ، ٧٢٠ هـ٣ د٣ ش٤ ، ٩٠ هـ٢ د ش٣ أن يبحث في مبدأ الأمر عن القاسم المشترك الأعظم بين الاعداد ٤٣٢ ، ٧٢٠ ، ٩٠ وحيث أنه ١٨ فيكون القاسم المشترك الأعظم بين الحدود المعروضة هو ١٨ هـ د ش

مثلاً

[illegible]

وسقوط [illegible]

[illegible] في الباب [illegible] موجودة

في الحكمة [illegible] وجب [illegible]

المقاسم [illegible]

وهذا لا يتأتى [illegible] لأنك

في أغلب الأحوال [illegible]

درجة أقل من [illegible]

[illegible] العربية [illegible]

قسمة جزئية [illegible] في [illegible]

لا بد [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

تعيين المقاسم [illegible] الحكمة التي يضرب بها المقسوم

بعد بين الحدين هو د س فاذا قسمت الكمية م على د س ت والكمية

ء على ح س خصص لخارجان صحيحا

ح = ٢ ح٤ س٦ + ١١ ح س٤ − ١٢ س٣ − ١٧ ح ص س + ٤١ ص

و ء = − ٣ ح٣ س٢ + ح س٢ + ٩ س٣ + ٣ ى − ٢ ح

وحينئذ يكون القاسم المشترك الأعظم بين الكميتين م , ح الكثيرتي الحدود

مساويًا القاسم المشترك الاعظم بين الكميتين ح , ء مضروبًا في د س

ونبحث الآن عن الكيفية التي يلزم سلوكها في تعيين القاسم المشترك

الاعظم بين الكميتين ح , ء الصحيحتين الكثيرتي الحدود وغير المحتويتين على

مضاريب مشتركة فنفرض أن هاتين الكميتين تكونا مرتبتين بالنسبة للحرف

س وأن درجة الكمية ء لا تزيد عن درجة الكمية ح فان كانت الكمية

ء تقسم الكمية ح قسمة صحيحة فانها تكون هي القاسم المشترك الاعظم

المطلوب فاذا قسمت الكمية ح على الكمية ء

وفرض أن القسمة غير صحيحة وتحصل من ذلك خارج قسمة صحيح كالخارج

ك وباق كالباقي ق درجته اقل من درجة الكمية ء بالنسبة

الى س تحصلت من ذلك المتساوية

ح =

[illegible] في [illegible] جذور [illegible]

[illegible] فيه هو [illegible] مشترك [illegible]

لكثيرتين [illegible] كثيرة حدود [illegible]

للكثيرتين [illegible] الكثيرة حدود [illegible] اعظم لان [illegible] مشترك

بين هاتين الكثيرتين كثيرة حدود [illegible] الأخير [illegible] لا يكون [illegible]

لانه غير مقسوم على [illegible] وهذا [illegible] لان كثيرتين [illegible]

ليس لهما بالمرة [illegible]

وهاك مثالا على ذلك هو

ج = ٣ س [illegible] − ١٠ س٣ + ٥٠ س [illegible]

ق = [illegible] س [illegible] + ٢ س [illegible] + ٦

[illegible]

[illegible]

د من مضروب كمية أ

وإذا كانت الكميتان جـ ، أ الكثيرتا الحدود محتويتين على حرف واحد كالحرف
س فإن مكررات قوى هذا الحرف تكون أولية معًا في كل كمية كثيرة الحدود
لأنه قد فرض أنه حذف من كل منها بين الكميتين سائر مضاريب الحدود
وينتج من ذلك أن القاسم المشترك الأعظم بين الكميتين جـ ، أ الكثيرتي
الحدود وهو حاصل ضرب المضاريب الأولية المشتركة بين الكميتين لا يتغير
إذا ضرب المقسوم جـ في مكرر الحد الأول من الكمية أ أو في أي مضروب
لهذا المكرر وبهذه الكيفية تجري عملية القسمة الأولى الجزئية بلا كسور
وبإجراء عملية مشابهة للمتقدمة في أثناء قسمة جـ على أ يتحصل مقسوم
جزئي لا يكون فيه مكرر الطرف الأول قابلًا للقسمة على مكرر الحد الأول
من المقسوم عليه ويتوالى العمل هكذا إلى أن يتوصل إلى باق كالباقي ق تكون
درجته دون درجة الكمية أ يلزم لإيجاد القاسم المشترك الأعظم بين
الكميتين جـ ، أ الكثيرتي الحدود أن تقسم الكمية أ على الكمية ق بشرط
أن يحذف فيما يوجد من المضاريب المشتركة بين حدود الكمية الباقية ق
حيث إنه لا يوجد مثلها في الكمية أ وبإجراء هذه العمليات على درجات
البواقي

تمرينة

$$٣س^٤ + ٤س^٣ - ٦س^٢ - ١٢س - ٥ \;\Big|\; \dfrac{س^٣ + ٣س^٢ + ٣س + ١}{٣س - ٥}$$

$$-\,٣س^٤ - ٩س^٣ - ٩س^٢ - ٣س$$

$$-\,٥س^٣ - ١٥س^٢ - ١٥س - ٥$$

$$+\,٥س^٣ + ١٥س^٢ + ١٥س + ٥$$

فيكون القاسم المشترك الأعظم هو $س^٣ + ٣س^٢ + ٣س + ١$

وقبل الانتقال الى الاحوال التى تكون فيها الكميات الكثيرة الحدود ٢١٢

محتوية على عدة حروف يلزم بيان الكيفية التى يمكن بها ايجاد القاسم المشترك الأعظم بين عدة كميات متى علم القاسم المشترك الأعظم بين كميتين

فاذا كان المطلوب ايجاد القاسم المشترك الأعظم بين الكميات الاربع جـ ، بـ ، هـ ، و يفرض أن و هو القاسم المشترك الأعظم بين الكميتين جـ ، بـ وأن وَ هو القاسم المشترك الأعظم بين الكميتين و ، هـ وأن وً هو القاسم المشترك الأعظم بين الكميتين وَ ، و فيكون القاسم المشترك الأعظم بين الكميات الاربع جـ ، بـ ، هـ ، و هو وً لان وَ ما كان يحتوى على سائر المضاريب الاولية المشتركة

وقبل الانتقال الى القسمة الثانية يحذف من المادة الاولى المذكورة ٢ ونعوض

الكمية الكثيرة الحدود ﺑ ٢ في ٣

القسمـــة الثانية

$$٣س^{٥} - ٦س^{٤} - ١٨س^{٣} + ١٢س^{٢} + ٣٩س + ١٨ \;\Big|\; ٣س^{٤} + ٤س^{٣} - ٦س^{٢} - ١٢س - ٥$$

$$- ٣س^{٥} - ٤س^{٤} + ٦س^{٣} + ١٢س^{٢} + ٥س \qquad\qquad س - ٥$$

$$- ١٠س^{٤} - ١٢س^{٣} + ٢٤س^{٢} + ٤٤س + ١٨$$

$$- ٥س^{٤} - ٦س^{٣} + ١٢س^{٢} + ٢٢س + ٩$$

$$- ١٥س^{٤} - ١٨س^{٣} + ٣٦س^{٢} + ٦٦س + ٢٧$$

$$+ ١٥س^{٤} + ٢٠س^{٣} - ٣٠س^{٢} - ٦٠س - ٢٥$$

$$+ ٢س^{٣} + ٦س^{٢} + ٦س + ٢$$

$$س^{٣} + ٣س^{٢} + ٣س + ١$$

ونصير هذا الخارج الصحيح والباقي الاول عن هذه القسمة الثانية ﺑ ٢

وضرب الثاني في ٣ ويحذف من الباقي الثاني المضروب ٢

القسمة

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] مشترك [illegible]

مشترك [illegible] القاسم المشترك الأعظم [illegible]

[illegible] بكثيرات حدود [illegible]

[illegible] بكثيرة حدود [illegible] جميع ما [illegible] بكثيرة حدود [illegible]

[illegible] حرف واحد [illegible] مجموعات [illegible] مكررات [illegible]

[illegible] في [illegible] واحد منها [illegible]

[illegible] ان [illegible] كثيرة

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

من المعلوم في هذه الحالة ان القاسم المشترك الأعظم بين مكررات قوى [illegible]

بين كرتين [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

لكرات الاربع [illegible]

[illegible]

بين كرة [illegible] كالكرتين [illegible]

ونفرض بمقتضى [illegible] (أ [illegible] ب) انه [illegible]

[illegible]

العمل على [illegible]

[illegible]

[illegible]

من الكرتين الكبرى [illegible]

بضرورة للكرات [illegible] فهذه الحركة [illegible]

[illegible] (أ [illegible] ب)

ونفرض

[illegible] هنا [illegible] الأصغر [illegible]

جـ ، د هو س − ١ وبناء على ذلك يكون [illegible]

لكميتين مفروضتين م ، ح هو

$$(ص - ١)(س - ١) = ص س - س - ص + ١$$

١١٤ ولننتقل أيضاً من الحالة التي تكون فيها الكميات كثيرة الحدود محتوية

على حرف واحد فقط إلى الحالة التي تكون فيها هذه الكميات محتوية على

حرفين ثم ننتقل من هذه الحالة الأخيرة إلى الحالة التي تكون فيها تلك

الكميات محتوية على ثلاثة حروف وهلم جرا وبناء على ذلك يمكن تعيين القاسم

المشترك الأعظم بين عدة كميات محتوية على عدة حروف

١١٥ ولنمثل لذلك بالكميتين ﺃ ، ﺏ المحصورتين في [illegible] وهما

$$ﺃ = - ٤ ح^{٢} س^{٤} + ١٤ ح س^{٣} - ١٠ ص س + ١٦ ص [illegible]$$

$$ﺏ = - ح^{٤} س + ح س^{٣} - س - ح س - [illegible]$$

وحيث أن الكمية ﺃ لا تحتوي على [illegible] بعد حرف في القاسم

المشترك الأعظم بين الكميتين وبناء على ذلك يكون قسمتا المقدار الكمية ﺃ

المرتبة بالنسبة إلى ص هكذا

$$- ٤ ح^{٤} س + ١٤ ح س^{٣} - ١٠ س ، - ١٠ ص + ١٦ ٣$$

بالنسبة الى الكمية م هو ح = ص^{٢} - ١ والقاسم المشترك الأعظم بين قوى س بالنسبة الى الكمية ن هو ى = ص^{٢} - ٢ص + ١ = (ص - ١)^{٢} والقاسم المشترك الأعظم بين ح و ى هو ص - ١

فاذا قسمت الكمية م على ص^{٢} - ١ والكمية ن على ص^{٢} - ٢ص + ١ تحصل من ذلك الخارجان

م = ٢(ص - ٢) س^{٣} + ٣ س^{٢} - (٢ص - ١)

ن ن = ٣(ص - ٢) س^{٢} + ٧ س - (٣ص + ١)

ولكى يكون خارج قسمة الكمية م على الكمية ن صحيحين تضرب الكمية م فى ٣ فيتحصل الباقى

- ٥ س^{٢} + ٢(٣ص + ١) س - ٣(٢ص - ١)

ويلزم لتوالى عملية القسمة ان يضرب المقسوم الجزئى الثانى فى ٣(ص - ٢)

فيتوصل الى باق ذى درجة اولى بالنسبة الى س هو

(١٨ص^{٢} - ٣٠ص + ١٢) س - (١٨ص^{٢} - ٣٠ص + ١٢)

فاذا حذف من هذا الباقى المضروب ١٨ص^{٢} - ٣٠ص + ١٢ آل الى

ق = س - ١

وبقسمة الكمية ن على الباقى ق يكون باقى هذه القسمة صفرا

ولنأخذ

اذا كانت لا تحتوى الا على قوى صحيحة موجبة لهذه الحروف وكانت هذه تكون كميات صحيحة الثابتة وحينئذ فالكمية ذات حدود ...

$ش - \frac{س\sqrt{ح}}{٣} + \frac{١}{٢}$ دلالة تامة للحرف س والكمية

$ش - \frac{٣ س ص}{هـ} - \frac{ث ء}{\sqrt{ء+١}}$ دلالة تامة بحرفين س ، ص

ويقال أيضا ان لدلالة تامة بكمية واحدة او عدة كميات تكون قابلة للقسمة على دلالة اخرى تامة لهذه الكميات متى كان خارج القسمة تاما بالنسبة لتلك الكميات

وقد علم من حل المعادلات ذات الدرجة الثانية ان ... كل معادلة مشابهة لهذه المعادلات هو حاصل ضرب ... اولى بالنسبة الى س وعلى ذلك تكون الكمية ذات حدود ...

$ش - \frac{س\sqrt{ح}}{٣} + \frac{١}{٢}$ مثلا هي حاصل ضرب ...

$س - \frac{\sqrt{ح - ٤ ...}}{٦}$

وسيأتي ان هذه النظرية تعتبر كافة ... دلالة تامة للكمية س كالدلالة $ش^م + ح ش^{م-١} + ب ش^{م-٢} + ...$

(بجعل م رمزا لعدد صحيح هو درجة الدلالة ... هو الواحد) تكون عبارة عن حاصل ضرب عدة مضاريب بدرجة ...

وحينئذ يبحث عن القاسم المشترك الأعظم بين هاتين الكميتين الكثيرتي الحدود الأخيرتين أو عن القاسم المشترك الأعظم بين

$$٢س^٢ + ٧س - ٦ \quad , \quad ٣س + ٢$$

فيرى أنه $٣س + ٢$ وحيث أن هذا القاسم يقسم الكمية ء قسمة صحيحة فيؤخذ من ذلك أن $٣س + ٢$ هو القاسم المشترك الأعظم بين الكميتين الكثيرتي الحدود ج و ء

ولنذكر للتمرين مثالين هما

الاول $ج = ٦س^٣ - ٦ص س^٢ + ٢ص^٢ س - ٢ص^٣$ و

$ء = ١٠س^٢ - ١٥ص س + ٣ص^٢$

فالقاسم المشترك الأعظم بين هاتين الكميتين هو $س - ص$

والثاني $ج = (ء - هـ)س^٢ + (هـ ء - ٢هـ)س + هـ^٢ء - ٢هـ^٢$ و

$ء = (هـ ء - هـ + ء^٢ - ء هـ)س + ٢هـ + هـ ء^٢ - ٢هـ ء - ء^٢ هـ$

فالقاسم المشترك الأعظم بين هاتين الكميتين هو $ء - هـ$

في تحليل الدالات التامة بكمية كالكمية س الى مضاريب بدرجة اولى

٢١٦ ويطلق على الكمية الجبرية اسم الدالة التامة بحرف أو بعدة حروف اذا كانت

(٣٦٤ ،

م = (س − ح) × ك + ر

ومنها يؤخذ

م / (س − ح) = ك × ك + ر / (س − ح)

وينبغي بالفرض ان يكون م/(س − ح) كناية عن دلالة تامة للمتغير س

وحيث أن الباقي ر كمية غير محتوية على س فيلزم ان يكون ر/(س − ح) دلالة

تامة للمتغير س وعلى ذلك اذا كان س − ح لا يقسم الدلالة م يلزم

ان يكون قاسما للدلالة ر

النظرية الثانية

بند ٢١٩ أي دلالة تامة للمتغير س لا يكون لها غير جملة واحدة من المضاريب

التي بدرجة اولى

وللبرهنة على هذه النظرية يفرض حاصل الضرب

م (س − ح) (س − ك) (س − هـ) .... (س − ط)

فاذا جعل م رمزا المضروب غير محتو على س وفرض ان هذا الحاصل

يساوي حاصل ضرب آخر هو

مَ (س − حَ) (س − كَ) (س − هَ) .... (س − طَ)

فان المضروب س − ح الذي يقسم الحاصل الثاني يكون قاسما بالضرورة للحاصل

عددها م كالمضاريب س ــ ح , س ــ ى , س ــ هـ , كخ وذلك بجعل

ح , ى , هـ , كخ رموزاً لكميات مشتملة على المتغــــير س ويمكن أن

تكون هذه الكميات مقادير تخيلية توضع بالصورة ل + ف √ ــ١

فان كان مكرر الحد الأول من الدلالة غير الواحد فانه يتحصل من قسمتها

على هذا المكرر خارج درجته عين درجتها يتحلل بالمثابة المتقدمة فاذا جعل

جـ رمزاً لمكرر الحد الأول فان الدلالة المذكورة تكون مساوية لحاصل

ضرب يوضع بالصورة جـ (س ــ ح) (س ــ ى) ... كخ

بند ٢١٧ النظريات المتقدمة (في بندى ٢٠٦ , ٢٠٧) تطبق على المضاريب التي بدرجة

اولى من الدلالات التامة ولا تختلف عنها الا ببعض تغيير في منطوق

المسائل وبراهينها

النظرية الاولى

بند ٢١٨ أي مضروب بدرجة اولى كالمضروب س ــ ح الذي يقسم

حاصل ضرب الدلالتين التامتين جـ , جـَ يقسم بالضرورة واحدة

منهما لانه اذا كانت الدلالة جـ لا تقبل القسمة على س ــ ح يحصل من

القسمة خارج صحيح كالخارج ك بالنسبة الى س وباق كالباقي غير المحتوى

س وحينئذ تحصل هذه المتساوية وهي

جـ =

[illegible] كانت [illegible] هذه [illegible] في [illegible]

وتنتفي هذه [illegible] كون [illegible]

عين المضاريب المشتركة بين [illegible] وجب به [illegible] أخرى هذه [illegible]

[illegible] كما جرت على [illegible] ويكون [illegible] هكذا [illegible] بأن لا يكون

[illegible] فإن كان هذا [illegible] ومما كان [illegible]

هو المقسوم [illegible] الأعظم المطلوب وإن كان غير [illegible] ولم يكن بين

الكميتين [illegible] أكثر الحدود مضروب مشترك بالنسبة إلى [illegible]

الباب التاسع

في [illegible]

فصل [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

رموز اللجبات معلومة

الأول وحينئذ يلزم بمقتضى نظرية المتقدمة انه يكون قاسما الواحد من

المضاريب س-ح ، س-ى ، الخ ومن هنا يعلم انه يكون مساويا للأعظم المضار

مثلا اذا فرض ان ح=ى وقطع النظر عن المضروبين المتساويين س-ح

، س-ح كان الخارجان متساويين ومن هنا يؤخذ أن المضروب

س-ى يكون مساويا الواحد من المضاريب س-ى ، س-هـ ، الخ

ويتوالى العمل بهذه المثابة يعلم أن مضاريب حاصل الضرب المشتملة على

س تكون متساوية النظير لنظيره وحينئذ ينتج من ذلك أن ح=ح

بحيث نفرض أن ح ، ح كناية عن دلالتين تامتين للمتغير س فاذا

كانت مضاريب درجة اولى من مضاريب الدلالة ح تقسم الدلالة

ح فان حاصل ضرب هذه المضاريب المشتركة يكون هو القاسم المشترك

الأعظم بين الدلالتين المذكورتين بالنسبة الى س

وتحصيل هذا القاسم المشترك الأعظم يلزم أن يجرى على دلالة عددية

نسبية يجاد القاسم المشترك الأعظم بين كثيرتين كثيرتى الحدود

لانه اذا فرض أن الدلالة ح لا تزيد في الدرجة عن الدلالة ح وكانت

الدلالة ح تقسم الدلالة ح كانت هي القاسم المشترك الأعظم

المطلوب فاذا لم تكن قاسمة لها يفرض أن خارج القسمة هو ك والباقي ،

٤ س^{٥} − ١٣ س^{٤} + ٥ س^{٣} − ٤ س^{٢} − ٨

ويفرض أنه يراد تحصيل مقدار هذه الكمية الكثيرة الحدود عندما يكون س = ٣ فيجرى العمل بهذه المثابة وهى

٤×٣−١٣=−١ ، −١×٣+٥=+٢ ، +٢×٣−٤=+٢

، +٢×٣=+٦ ، +٦×٣−٨=+١٠

وحينئذ يكون العدد ١٠ هو الناتج المطلوب لان هذا العدد يكون بموجب هذه العمليات مساويًا

٤×٣^{٥} − ١٣×٣^{٤} + ٥×٣^{٣} − ٤×٣^{٢} − ٨

بند ٢٢٤ ويطلق اسم جذر المعادلة على كل كمية أو مقدار تخيلى اذا وضع فى هذه المعادلة بدل المجهول صيرها منطابقة

وللحل العمومى للمعادلات يحتاج الى ايجاد مقادير الجذور وبالنسبة لمكررات جميع المعادلات المتحدة فى الدرجة قد صار البحث مدة طويلة عن هذا الغرض وذكرت (فى بند ٨٥) الكيفية التى يحصل التوصل بها الى حل المعادلة ذات الدرجة الثالثة وسيأتى بيان الكيفية التى يتوصل بها الى حل المعادلة ذات الدرجة الرابعة غير أن القوانين المتحصلة بهذه المثابة توضع بصورة لا يمكن استعمالها فى ايجاد المقادير الرقمية للجذور بواسطة استبدالها بمقادير المكررات مالم تكن

ولا يفرض للحد الأول مكرر غير الواحد لانه ان اختلف عن الواحد قسمت سائر حدود المعادلة على هذا المكرر بدون أن يختل تعادلها

٢٢٢ يرمز على وجه الاختصار لدلالات كية كالكمية س بالرموز د(س) و ء(س)، ه(س) الخ ويرمز أيضا لدلالات الكميتين س ، ص بالرموز د(س ، ص)، ء(س ، ص) الخ ولابد من اختلاف الرمز الموضوع امام القوسين اذا اختلفت الدلالات المذكورة لكن اذا تكرر الحرف الواحد المستعمل بهذه المثابة في عملية حسابية كان دالاً على دلالات مركبة بكيفية واحدة وحينئذ اذا كانت دلالة مبينة بالرمز د(س) فالرمز د(حـ) يكون دالاً على ما تؤول اليه هذه الدلالة اذا وضع فيها حـ بدل س والرمز د(ص-ء) يكون دالاً على ما تؤول اليه تلك الدلالة اذا وضع فيها ص-ء بدل س والرمز د(٣) يكون دالاً على ما تؤول اليه عندما يفرض فيها أن س = ٣ وكذلك يكون الرمز د(س ، ٣) دالاً على ما تؤول اليه الدلالة ء(س ، ص) عندما يفرض فيها أن ص = ٣ وأن س يكون باقيا على حاله

٢٢٣ ولكي يحسب بأبسط طريقة المقدار الذي يكون لدلالة تامة للكمية س عندما يفرض للتغير س مقدار رقمي تجري العمل كما في هذا المثال وهو لنفرض الكمية الكثيرة الحدود

$$ج_1 س^م + م ج_1 س^{م-1} + د_1 س^{م-1} + (م-1) د_1 س^{م-2} + هـ_1 س^{م-2} + (م-2) هـ_1 س^{م-3} + \dots\dots يخ$$

$$ص + م(م-1) ج_1 س^{م-2} + (م-1)(م-2) د_1 س^{م-3} + (م-2)(م-3) هـ_1 س^{م-4} + \dots\dots$$

$$\frac{ص''}{1\times2} + يخ$$

ثم يوضع على وجه الاختصار

$$ص = ج_1 س^م + د_1 س^{م-1} + هـ_1 س^{م-2} + يخ$$

$$ص' = م ج_1 س^{م-1} + (م-1) د_1 س^{م-2} + (م-2) هـ_1 س^{م-3} + يخ'$$

$$ص'' = م(م-1) ج_1 س^{م-2} + (م-1)(م-2) د_1 س^{م-3} + (م-2)(م-3) هـ_1 س^{م-4} + يخ''$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

وحينئذ تكون [illegible]

[illegible]

وحيث أن ص هي الكمية الكثيرة الحدود المفروضة [illegible]

من الكمية الكثيرة الحدود ص بضرب كل حد [illegible]

عن اصله بواحد فى هذا الحد وتستنتج كميات [illegible]

السابقة عليها كما استنتجنا الكمية ص' من الكمية ص

ويطلق على الكمية الكثيرة الحدود ص' [illegible]

هذه الأخيرة محققة لبعض شروط خصوصية كما تقدم ذلك في المعادلة ذات الدرجة الثالثة

وبهذه الصعوبة كانت تأتي في المعادلة التي تزيد عن تلك المعادلة في الدرجة لو حصل التوصل الى حلها بالقوانين المذكورة

وكان يلزم حينئذ أن يبحث عن الطرق التي يمكن بواسطتها حساب جذور معادلة جبرية مكرراتها مبينة بأعداد معلومة

ونتصدى لذكر النظريات العمومية التي قد بنيت عليها هذه الطرق فنقول

في تركيب تحليل الكمية الناتجة من دالة تامة للمتغير س

عند وضع س+ص بدل س

حينئذ لتكن $ج س^م + ب س^{م-١} + ه س^{م-٢} + الخ$

هي دالة تامة مثلا

فاذا وضع س+ص بدل س آل ذلك الى

$$ج (س+ص)^م + ب (س+ص)^{م-١} + ه (س+ص)^{م-٢} + الخ$$

واذا حللت قوى الكمية ذات الحدين س+ص ورتبت بحسب الدرجات المتنازلية للمتغير س تحصل

بند ٢٢٦ ولتطبيق ما تقدم على مثال يتعلق باستعمال المشتقات نفرض الكمية الكثيرة الحدود

$$\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٥} + ٥\,\text{س}^{٤} + \text{س}^{٣} - ١٦\,\text{س}^{٢} - ٢٠\,\text{س} - ١٦$$

فاذا اريد تحصيل الكمية التى تؤول اليها هذه الكمية الكثيرة الحدود عند وضع ص−١ بدل س فانه يلزم أن تحسب المشتقات المتوالية

وحينئذ تكون المشتقة الاولى هى

$$\text{د}'(\text{س}) = ٥\,\text{س}^{٤} + ٢٠\,\text{س}^{٣} + ٣\,\text{س}^{٢} - ٣٢\,\text{س} - ٢٠$$

وبقسمة المشتقة الثانية على ٢ يتحصل

$$\frac{\text{د}''(\text{س})}{١\times٢} = ١٠\,\text{س}^{٣} + ٣٠\,\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} - ١٦$$

وبقسمة مشتقة هذه الدلالة الأخيرة على ٣ يتحصل

$$\frac{\text{د}'''(\text{س})}{١\times٢\times٣} = ١٠\,\text{س}^{٢} + ٢٠\,\text{س} + ١$$

وبقسمة مشتقة هذه على ٤ يتحصل

$$\frac{\text{د}''''(\text{س})}{١\times٢\times٣\times٤} = ٥\,\text{س} + ٥$$

ثم بقسمة مشتقة هذه على ٥ يتحصل

$$\frac{\text{د}'''''(\text{س})}{١\times٢\times٣\times٤\times٥} = ١$$

فاذا وضع فى هذه الدلالات المتنوعة −١ بدل س حدث

$$\text{د}(-١) = -٩ \text{ و } \text{د}'(-١) = ٠ \text{ و } \frac{\text{د}''(-١)}{١\times٢} = ١ \text{ و } \frac{\text{د}'''(-١)}{١\times٢\times٣} = -٩ \text{ و } \frac{\text{د}''''(-١)}{١\times٢\times٣\times٤} = ٠ \text{ و } \frac{\text{د}'''''(-١)}{١\times٢\times٣\times٤\times٥} =$$

فقط وعلى المشتقة $د''$ اسم مشتقة $د''$ و الخ ويقال ايضا للكمية $د''$ المشتقة الثانية وللكمية $د'''$ المشتقة من المرتبة الثالثة وهلم جرا

ومتى كانت دلالة مبينة بالرمز $د(س)$ كانت مشتقاتها المتوالية مبينة بالرموز $د'(س)$ ، $د''(س)$ ، $د'''(س)$ والخ وبمقتضى ذلك تؤول المعادلة السابقة الى

$$د(س+ص) = د(س) + د'(س)ص + د''(س)\frac{ص^2}{1\times2} + د'''(س)\frac{ص^3}{1\times2\times3} + الخ$$

وحيث أن اعلى أس للكمية س ينقص عن اصله بواحد بالانتقال من كمية كثيرة الحدود معلومة الى مشتقتها الاولى أو من مشتقة الى التالية لها فيتكون من كمية كثيرة الحدود درجتها م مشتقات متوالية عددها م الأخيرة منها غير محتوية على س ويشاهد بالسهولة انه اذا كان الحد الاول من الكمية الكثيرة الحدود مبينا كاسبق بالرمز $ج_1 س^م$ كانت المشتقة الأخيرة أو المشتقة التي رتبتها م مبينة هكذا

$$1\times2\times3 \cdots\cdots \times م \times ج_1$$

وبنآء على ذلك يتحصل من قانون الحدود المركبة للدلالة $د(س+ص)$ المقدار $ج_1 ص^م$ للحد الأخير وهذا هو المشاهد فيما تقدم اذ من البديهي بعد وضع $س+ص$ بدل س في الكمية الكثيرة الحدود $ج_1 س^م + ب_1 س^{م-1} +$ الخ أنه يحدث من الكمية $ج_1 (س+ص)^م$ الحد $ج_1 ص^م$ وحينئذ لا يكون هناك حد آخر يكون فيه أس ص مساويا للاس م أو أكبر من الأس م

مقـادير صغـــيرة جدا [illegible]

و كثيرة حدود متسوقة بأس متزايدة [illegible]

[illegible] تكون حدود مقادير موجبة و [illegible]

مقادير محدودة في علامة [illegible]

كثيرة حدود كبيرة بقدر ما يراد [illegible]

وغيرها .

[illegible] كثيرة حدود جـ س + د س + [illegible] وكانت لأس

اعداد صحيحة موجبة متكونة متناقصة [illegible] وكانت [illegible]

كثيرة حدود مركبة من عدد محدود من حدود [illegible] تتغير [illegible]

صغيرا جدا موجب او سالب كانت كثيرة حدود مقدار صغير جدا في علامة

مع مقدار حد الأول حـ س

ولذا يوضع كثيرة حدود محدودة هكذا

حـ س (١ + [illegible] + [illegible] + [illegible])

فاذا تغيرت س مقدار صغير جدا [illegible]

[illegible] موجب [illegible] مقادير صغيرة [illegible]

في كثيرة حدود المحصورة بين قوسين مقادير [illegible] توحد [illegible]

ومن هنا ينتج

$$د\,(ص-١) = ص^{٥} - ٩\,ص^{٣} + ص^{٢} - ٩$$

فاذا استعملت الطريقة المتقدمة في تحصيل الكمية التي تؤول اليها الكمية الكثيرة الحدود $د\,س^{٤} - ٥\,س^{٢} + ٣\,س - ١$ عندما يوضع فيها $ص - ٢$ بدل $س$ حدث $د\,ص^{٤} - ١٦\,ص^{٣} + ٣٤\,ص^{٢} - ١٤\,ص + ٥$

في المقادير التي تأخذها الدالة التامة للمتغير س عندما يفرض له مقادير كبيرة أو صغيرة وفي التغيرات التي تطرأ على الدالة عندما يأخذ س في التغير بالتوالي

بند ٢٢٧ في كثيرة الحدود $ج\,س^{م} + ج_{١}\,س^{ح} + ج_{٢}\,س^{ع} + ج_{٣}$ اذا كانت الأسس $م ، ح ، ع ، ...$ اعدادا صحيحة موجبة مكونة لمتسلسلة تنازلية وفرض للمتغير $س$ مقادير رقمية كبيرة وموجبة او سالبة كانت مقادير كثيرة الحدود متحدة في العلامة مع مقادير الحد الأول $ج\,س^{م}$ ويمكن أن يفرض للمتغير $س$ مقدار كبير بحيث يكون مقدار كثيرة الحدود كبيرا بقدر ما يراد ولهذا توضع كثيرة الحدود المفروضة هكذا

$$ج\,س^{م}\left(١ + \frac{ج_{١}}{ج} \times \frac{١}{س^{م-ح}} + \frac{ج_{٢}}{ج} \times \frac{١}{س^{م-ع}} + ...\right)$$

فاذا كان للمتغير $س$ مقدار كبير جدا كانت مقادير الكسور $\frac{١}{س^{م-ع}}$ و ... صغيرة جدا وبناء على ذلك تكون الحدود $\frac{ج_{١}}{ج} \times \frac{١}{س^{م-ح}}$ و $\frac{ج_{٢}}{ج} \times \frac{١}{س^{م-ع}}$ و ...

المحصورتين ل ، ب

[illegible]

فلنجعل ض رمزاً لكمية صغيرة [illegible] وكان عدد ح أكبر من

سائر المكررات الداخلة في الكميات الكثيرة الحدود [illegible]

[illegible] ونحو فإن كل حد من حدود هذه الكميات يكون بالنسبة لأي

مقدار للمتغير س محصور بين ل ، ب أصغر من ه [illegible] وكان

[illegible] وأصغر من ه [illegible] أي أن ذلك يكون مقدار كل [illegible] الكثيرة الحدود أصغر من [illegible]

فالغرض هذا نجعل [illegible] رمز [illegible]

للعدد م ه إذا كان [illegible] كمية [illegible] (د)

بالنسبة لأي مقدار متغير [illegible]

[illegible]

بحيث أن لطرف [illegible]

فإن فرض ولأن [illegible]

وثانياً أن فرض أن [illegible]

يتحقق الشرط الأول متى كان [illegible] وبناء على ذلك إذا فرض متغير

س مقادير لا تزال آخذة في الزيادة بالابتداء من ل إلى ب وكان

وبناءً عليه تكون موجبة وحينئذٍ يكون لكثيرة الحدود مقادير محدودة في المفروضة مع مقادير الحد الأول $\text{ح}\ \text{س}^{م}$ ويمكن زيادة على ذلك أن يكون لكثيرة الحدود مقدار صغير بقدر ما يراد لكون المضروب $\text{ح}\ \text{س}^{م}$ يتناقص مع س الى غير نهاية

بند ٢٢٩ اذا علمت دلالة تامة كالدلالة د (س) ومقدار مخصوص كالمقدار هـ للمتغير س أمكن تحصيل كمية كالكمية ك صغيرة بقدر ما يراد بحيث يكون الفرق د (هـ + ك) − د (هـ) أقل من كمية معلومة صغيرة بقدر ما يراد أيضاً ولذا نشاهد (بمقتضى بند ٢٢٥) أن

$$\text{د}(\text{هـ}+\text{ك})-\text{د}(\text{هـ})=\text{د}'(\text{هـ})\,\text{ك}+\text{د}''(\text{هـ})\frac{\text{ك}^{٢}}{١\times٢}+\text{د}'''(\text{هـ})\frac{\text{ك}^{٣}}{١\times٢\times٣}+\text{ح}$$

فاذا فرض الكمية ك مقدار صغير جداً كان لكل من الحدود $\text{د}'(\text{هـ})\,\text{ك}$ و $\text{د}''(\text{هـ})\frac{\text{ك}^{٢}}{١\times٢}$ و ح مقدار صغير جداً وحيث أن عدد هذه الحدود محدود فيلزم أن تكون الكمية ك صغيرة جداً ليكون مجموع هذه الحدود صغيراً بقدر ما يراد وحينئذ يثبت المطلوب

تنبيه

اذا كان ل ، ى عددين معلومين وكان ى أكبر من ل واريد تعيين الكمية ك بحيث يحصل بالنسبة لاى مقدار يفرض للمتغير س كالمقدار

ح

يكونان متخالفين في العلامة لان المقدارين المتطرفين د(ل) , د(ے) متخالفان في العلامة بالفرض وحيث أنه يوجد بين مقداري الكمية د(س) المتواليين المتخالفين في العلامة فرق أصغر من الكمية ط فيكون كل منهما أصغر من هذه الكمية وحيث أنه لابد من وقوع ذلك على أي وجه كان صغر الكمية ط فيؤخذ من ذلك أنه يوجد بين ل , ے بالأقل مقدار للمتغير س يكون الكمية د(س) مساوية للصفر

تنبيه

حيث انه يمكن أن الكمية الكثيرة الحدود د(س) تنتقل عدة مرات من الايجاب الى السلب ومن السلب الى الايجاب عندما يأخذ المجهول س في التغير من ل الى ے فلا مانع من انه يكون للمعادلة د(س) = ٠ عدة جذور حقيقية محصورة بين ل , ے

النظرية الثانية

٢٣١ كل معادلة ذات درجة فردية لها بالأقل جذر حقيقي ضد الحد العلامة مع حدها الأخير

مثلا لنفرض المعادلة

$$س^م + ا س^{م-١} + ب س^{م-٢} \ldots\ldots \pm ح = ٠$$

الفرق بين كل مقدارين متواليين مساويًا $\frac{ط}{ح+ط}$ أو أصغر من هذا يمكن تحصيل الدالة د(س) جملة مقادير الفرق فيها بين كل مقدارين متواليين منها أصغر من ط

في بعض نظريات يعلم بواسطتها ان كل معادلة لها جذر حقيقي وفي هذه النظرية وهي أن كل معادلة لها جذر

النظرية الاولى

بند ٢٣ اذا تحصل من العددين ل , ى الموضوعين في الطرف الأول من معادلة كالمعادلة د(س) = ٠ ناتجان متخالفان في العلامة كان للمعادلة بالأقل جذر حقيقي محصور بين ل , ى لانه يمكن بمقتضى ما تقدم في البند السابق أن نعرض للمتغير س مقادير لا تزال آخذة في الزيادة بالابتداء من ل الى ى بحيث تكون الفروق بين المقادير المطابقة للكمية د(س) كلها اقل من كمية كالكمية ط التي تؤخذ صغيرة بقدر ما يراد ولا بد أنه يوجد بين مقادير د(س) مقداران متواليان

متبوعة بعدة حدود اخرى سالبة (بفرض ان الطرف الثانى معدوم) فلا يكون للمعادلة غير جذر واحد موجب فقط

مثلا لنفرض المعادلة

$$س^{م} + ح_{١} س^{م-١} + \dots + ح_{ء} س^{م-ء} - ح_{ء+١} س^{م-ء-١} - \dots\dots\dots - ر = ٠$$

التى يرى فيها ان الحدود موجبة الى $ح_{ء} س^{م-ء}$ وأن جميع الحدود التالية لها سالبة بحيث أن الحد الأخير من هذه المعادلة سالب فلا يكون له جذر موجب لكنه يلزم ان يبرهن على انه لا يكون له غير جذر واحد وحينئذ يمكن وضع الطرف الأول من المعادلة هكذا

$$س^{م-ء}(س^{ء} + ح_{١} س^{ء-١} \dots\dots + ح_{ء} - \frac{ح_{ء+١}}{س} \dots\dots\dots\dots - \frac{ر}{س^{م-ء}})$$

فاذا اخذ المتغير س فى الازدياد بالابتداء من الصفر فان الكمية $س^{ء} + ح_{١} س^{ء-١} \dots + ح_{ء}$ لا تزال آخذة فى الزيادة التى تكون فيها ثابتة وهذا لا يتأتى الا اذا كان الحد الأول من المعادلة موجبا و نظيره وأما الكمية $\frac{ح_{ء+١}}{س} + \dots\dots + \frac{ر}{س^{م-ء}}$ فانها لا تزال آخذة فى التناقص فاذا اذا بلغ المتغير س النهاية فى الزيادة فان علامة الطرف الأول من المعادلة لا تتغير الا مرة واحدة واذا لا يكون لهذه المعادلة غير جذر واحد موجب

ويفرض فيها أن م كناية عن عدد فردي

فاذا لوحظت في مبداء الأمر الحالة التي يكون فيها الحد الأخير سالبا وجعل

س = ٠ في الطرف الأول من المعادلة المذكورة كان الناتج سالبًا لكونه

هو الحد الأخير واذا فرض للمتغير س مقدار كبير بحيث يكون الطرف الأول

متحدًا في العلامة مع حدها الاول (كما في بند ٢٢٧) كان الناتج موجبًا وحينئذ يكون للمعادلة بالأقل جذر موجب

فاذا كان الحد الأخير موجبًا وجعل س = ٠ كان الناتج موجبًا واذا فرض

للمتغير س مقدار سالب كبير بالكفاية كان الناتج سالبًا وحينئذ يكون

للمعادلة بالاقل جذر سالب

النظرية الثالثة

بند ٢٣٢ كل معادلة ذات درجة زوجية حدها الأخير سالب يكون لها

بالأقل جذران حقيقيان احدهما موجب والآخر سالب

لانه اذا جعل فيها س = ٠ كان الناتج سالبًا واذا فرض للمتغير س مقدار

كبير موجب أو سالب كان هذا الناتج موجبًا لانه متحد في العلامة مع

الحد الأول الذي لا يزال موجبًا لكونه مزدوج الدرجة

النظرية الرابعة

بند ٢٣٣ اذا كان الطرف الأول من معادلة مركبًا من جملة حدود موجبة

مبنية

$(+\sqrt{-1})^{4ع+1} = +\sqrt{-1}$ ، $(+\sqrt{-1})^{4ع+3} = -\sqrt{-1}$

فيحدث بالبناء على ذلك

$(-\sqrt{-1})^{4ع+1} = -\sqrt{-1}$ و $(-\sqrt{-1})^{4ع+3} = +\sqrt{-1}$

وهذه المتساويات يؤخذ منها أن كل واحدة من معادلتين السابقتين اللتين جعل فيهما م رمز العدد فردي لهما دائماً جذر يساوي $+\sqrt{-1}$ أو $-\sqrt{-1}$ فاذا فرضت معادلة $س^{ك} = ص$ أن $ص = +\sqrt{-1}$ أو $ص = -\sqrt{-1}$ فانه ينتج منها لمتغير س مقادير توضع بالصورة $ع + ك\sqrt{-1}$ ومن هنا يعلم أنه يوجد لهذا المتغير س مقادير تخيلية تحقق بها المعادلتات $س^{م} = +\sqrt{-1}$ و $س^{م} = -\sqrt{-1}$ ولنفرض الآن المعادلة

$$س^{م} + ج_{1} س^{م-1} + ج_{2} س^{م-2} + \ldots + ج_{م-1} س + ج_{م} = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

التي كانت فيها جميع مكررات $ج_{1}$ و $ج_{2}$ ... و $ج_{م-1}$ و $ج_{م}$ دالة فيها على كميات حقيقية أو على مقادير تخيلية

فاذا فرض في الطرف الأول من هذه المعادلة أن $س = ع + ك\sqrt{-1}$ ولوحظ أن ع و ك دالان في هذا المقدار على كميتين حقيقيتين تخص من ذلك مقدار تخيلي $ع + ك\sqrt{-1}$ و ع و ك هما دالان حقيقيتان تامتان لكل من ع و ك وحينئذ يلزم لتحقيق هذه المعادلة

النظرية الخامسة

بند ٥٣٢ أي معادلة لها جذر يوضع هكذا $ح + د\sqrt{-1}$ و ح و د هما كميتان حقيقيتان

مثلاً اذا فرضت المعادلات الاربع

$$س^{م} = +1 \quad و \quad س^{م} = -1 \quad و \quad س^{م} = +\sqrt{-1} \quad و \quad س^{م} = -\sqrt{-1}$$

شوهد أن المعادلة $س^{م} = +1$ لها جذر دائماً لأنها تتحقق مهما كان م بفرض $س = 1$ وأما المعادلات الثلاث الباقية فيظهر أن الواحدة منها وهي $س^{م} = -1$ بالأقل جذر حقيقي أو تخيلي وأن كل واحدة من المعادلتين الآخريين وهما $س^{م} = +\sqrt{-1}$ و $س^{م} = -\sqrt{-1}$ يكون لها جذر تخيلي متى كان م دالاً على عدد بهذه الصورة $2^{ك}$ وحيث أنه لم يبق علينا الآن نختبر في هاتين المعادلتين الاخيرتين الحالة التي يكون فيها م دالاً على عدد فردي او على حاصل ضرب عدد فردي في واحدة من قوى العدد ٢ فنفرض ليكن $م = 2^{ك} \times ح$ (بجعل ح رمز العدد فردي) فاذا جعل $س^{2^{ك}} = ص$ تحصل من ذلك المعادلتان:

$$ص^{ح} = +\sqrt{-1} \quad و \quad ص^{ح} = -\sqrt{-1}$$

وحيث أنه سيأتي في بند ٣٣٢ ان $(+\sqrt{-1})^{4ك+1}$

ضرب أ في ب للمضاريب وأن قياس خارج قسمة المقدارين التخيليين على بعضهما

هو خارج قسمة قياسيهما ... على قياس المقسوم عليه وحيث ... قيسه

المكررات ج، جَ، ...، جم دالة على كميات منتهية فإن حدث

تخيليان ع، ك أو أحدهما في الزيادة الى غير نهاية أخذت ...

الآخذ ع + ك $\sqrt{-1}$ ، $\frac{ج}{ع+ك\sqrt{-1}}$ ، $\frac{جَ}{(ع+ك\sqrt{-1})^{٢}}$ ، ... ، $\frac{جم}{(ع+ك\sqrt{-1})^{م}}$ في تناقص

الى غير نهاية أو أن هذه الكسور تؤول الى مقادير تخيلية كالمقادير

ب + بَ $\sqrt{-1}$ ، بٌ + بً $\sqrt{-1}$ ، ... التي يمكن فيها اعتبار كميات

ب، بَ، بٌ، بً ... صغيرة بقدر ما يراد ومن هنا ينتج أن

المجموع ١ + $\frac{ج}{ع+ك\sqrt{-1}}$ + $\frac{جَ}{(ع+ك\sqrt{-1})^{٢}}$ + ... يؤول الى مقدار تخيلي

كالمقدار ١ + ط + ل $\sqrt{-1}$ الذي يمكن فيه اعتبار كميتين ط، ل صغيرتين

بقدر ما يراد وبناء على ذلك يكون قياس هذا المجموع أي $\sqrt{(١+ط)^{٢}+ل^{٢}}$

مقدار يختلف عن الواحد بقليل [illegible] أن قياس $(ع+ك\sqrt{-1})^{م}$ لما كان يحدد

في الزيادة الى غير نهاية كان قياس ج + ... أحد في الزيادة

الى غير نهاية أيضا وحينئذ ثبت المطلوب ———

ويلزم الآن البرهنة على أن أصغر مقدار لقياس ج + ... يكون

[illegible] أن نثبت أنه إذا كان القياس [illegible]

أن يكون ح = ٠ ، ك = ٠ أو $ح^2 + ك^2 = ٠$. ولنتصدى للبرهنة على أنه يوجد دائماً لكل من ح و ك مقداران حقيقيان بهما يتحقق هذا الشرط وهو أن $ح^2 + ك^2 = ٠$. ونثبت في مبدأ الأمر أن أصغر مقدار جذر تخيلية $ح^2 + ك^2$ عند تغيير كل من ح و ك يكون مطابقاً لمقدارين محدودين من مقادير ح ، ك ثم نبرهن على أن هذا المقدار لا يكون إلا صفراً (ولا يخفى أن الجذر $\sqrt{ح^2 + ك^2}$ هي المعروفة كأساس في قياس المقدار التخيلي $ح + ك\sqrt{-1}$) فنقول

إنه يلزم للبرهنة على أن أصغر مقدار للقياس $\sqrt{ح^2 + ك^2}$ يكون مطابقاً لمقدارين محدودين من مقادير ح ، ك أن نثبت أنه إذا امتدت الكميات ح ، ك أو إحداهما في الزيادة إلى غير نهاية أخذ لقياس $\sqrt{ح^2 + ك^2}$ في الزيادة إلى غير نهاية كذلك ولذا يكتب الطرف الأول من المعادلة هكذا

$$س^م \left(1 + \frac{أ_1}{س} + \frac{أ_2}{س^2} + \cdots + \frac{أ_م}{س^م}\right)$$

ثم نجعل $س = ح + ك\sqrt{-1}$ فيحدث

$$ق + ق_1\sqrt{-1} = (ح + ك\sqrt{-1})^م \left[1 + \frac{أ_1}{ح + ك\sqrt{-1}} + \frac{أ_2}{(ح + ك\sqrt{-1})^2} + \cdots + \frac{أ_م}{(ح + ك\sqrt{-1})^م}\right]$$

وسبق في بند ٢٢٦ ، ٢٣٣ أن قياس حاصل ضرب عدة مقادير تخيلية هو حاصل ضرب

وإذا جعل رَ رمزاً لأدنى قوة للحد ر الذى يكون لا يؤول الى الصفر عند

جعل س = ح + ك $\sqrt{-1}$ بل أنه يوضع بهذه الصورة وهى ر١ + ف $\sqrt{-1}$

فلا يكون ر١ = ٠ و ف = ٠ فى آنٍ واحد

وبمقتضى ذلك اذا جعل حَ + كَ $\sqrt{-1}$ رمزاً للمقدار الذى تأخذه الكثيرة

الحدود (د) عند ما يوضع فيها ح + ك $\sqrt{-1}$ بدل س و هو بدل

ر حدث

حَ + كَ $\sqrt{-1}$ = ح + ك $\sqrt{-1}$ + (ر١ + ف $\sqrt{-1}$) هـ^م و^م ......

+ (الحدود المشتملة على هـ^{م+١} و هـ^{م+٢} و ..... و هـ^ن)

ويمكن ان يفرض لغير المعين و مقدار بحيث يكون و^م = +١ أو و^م = -١

فيحدث حَ + كَ $\sqrt{-1}$ = ح + ك $\sqrt{-1}$ ± (ر١ + ف $\sqrt{-1}$) هـ^م +

(الحدود المشتملة على هـ^{م+١} و هـ^{م+٢} و ..... و هـ^ن)

وبانفصال الاجزاء الحقيقية من الاجزاء التخيلية يحدث

حَ = ح ± ر١ هـ^م + (الحدود المشتملة على هـ^{م+١} و هـ^{م+٢} و ..... و هـ^ن) و

كَ = ك ± ف هـ^م + (الحدود المشتملة على هـ^{م+١} و هـ^{م+٢} و ..... و هـ^ن)

ومن هنا يؤخذ

حَ^٢ + كَ^٢ = ح^٢ + ك^٢ ± ٢ (ح ر١ + ك ف) هـ^م + (الحدود الحقيقية المشتملة على هـ^{م+١} و هـ^{م+٢} و ... و هـ^ن)

مقدار يختلف عن الصفر امكن ان يفرض للمتغير س مقدار تخيلي بحيث اذا رمز للناتج بعد وضع هذا المقدار في الطرف الأول من المعادلة بالكمية

ج̄ + ك √-١ حدث ج̄ + ج′/١ ز ج′ + ك

ولنرمز للمتغير س المطلوب بالكمية ع + ك √-١ + هـ ى ونجعل هـ رمزا لعدد صغير بقدر ما يراد و ى رمزا لخيل معين تفرض له مقادير حقيقية أو تخيلية فليحصل الناتج من وضع ع + ك √-١ + هـ و بدل المتغير س في الطرف الاول من المعادلة (١) يستعمل في مبدأ الأمر المتغير س بالكمية

س + ر ثم يجعل س = ع + ك √-١ ، ر = هـ و

ويمكن بيان الناتج المتحصل من وضع س + ر بدل س في الطرف الاول من المعادلة بالقانون

ج + ج′ ر + ج″/(١×٢) ر² + ج‴/(١×٢×٣) ر³ + ... + رم .... (٣)

بجعل ج رمزا للطرف الاول من المعادلة و ج′ و ج″ و ج‴ ... الخ رموزا للمشتقات المتوالية لكثيرة الحدود المذكورة

فاذا جعل س = ع + ك √-١ في كثيرة الحدود (٢) آل الحد الأول منها الى ع + ك √-١ وأما مكررات قوى الحد ر في الحدود التالية له فقد يكون بعضها معدوما إلا انها لا تنعدم جميعا دفعة واحدة لان مكرر أعلى قوة للحد ر هو الواحد

للحد هـ بأن يزيد عن م

وحيث انه قد فرض أن ج ر + ك ف = ٠ فلا يخص غير ك ر − ج ف ب

لانه ان كانت كلتا المتساويتين تساوى صفراً حدث

(ج ر + ك ف)^٢ + (ك ر − ج ف)^٢ = ٠ أو (ج^٢ + ك^٢)(ر^٢ + ف^٢) = ٠

وبناءً عليه يكون ج^٢ + ك^٢ = ٠ أعنى ج = ٠ و ك = ٠ أو ر^٢ + ف^٢ = ٠

أى ر = ٠ و ف = ٠ وهذا مخالف للفروض المتقدمة

ولما كانت الكمية ك ر − ج ف ليست معدومة أمكن فرض العدد هـ

صغيراً بالكفاية ليكون مجموع الحدود المشتملة على قوى هـ فى مقدار

ج^٢ + ك^٢ متحداً فى العلامة مع الحد الأول الذى هو

± ٢ (ك ر − ج ف) هـ^م ويمكن أيضاً ان يكون هذا الحد سالباً لانه يكفى

لذلك ان يعين و على وجه بحيث يكون و^م = + √١ أو − √١

بحسب ما تكون الكمية ك ر − ج ف سالبة أو موجبة فاذا تحققت

جميع هذه الشروط فانه يحدث

√(ج١^٢ + ك١^٢) < √(ج^٢ + ك^٢)

ويمكن أن يفرض للعدد هـ مقدار صغير بالكفاية بحيث يكون مجموع الحدود المشتملة على قوى هـ في مقدار عَ² + كَ² متحدًا في العلامة مع الحد ± (ع ر١ + ك١ ف) هـ^ن (كما تقدم في بند ٢٢٧) ويمكن زيادة على ذلك أن يكون هذا الحد سالبًا لانه يكفي لذلك تعيين غير المعين و على وجه بحيث يكون وَ مساويًا +١ أو −١ بحسب ما تكون الكمية ع ر١ + ك١ ف سالبة أو موجبة فاذا تحققت جميع هذه الشروط تحصل

عَ² + كَ² < ع² + ك² ومنها ينتج √(عَ² + كَ²) < √(ع² + ك²)

وحيث فرض أن الكمية ع ر١ + ك١ ف ليست معدومة فيلزم ايضًا اختبار الحالة التي تكون فيها الكمية ع ر١ + ك١ ف = ٠ وذلك بأن يفرض لغير المعين في المعادلة (٣) عوضًا عن أن يجعل فيها وَ = ±١ مقدار به يكون وَ = ± √−١ وحينئذ ينتج أن عَ + كَ √−١ = ع + ك١

± √−١ (ر١ + ف √−١) هـ^ن + ي هـ^{ن+١} ومن هنا يحدث

عَ = ع ∓ ف هـ^ن + ي هـ^{ن+١} ، كَ = ك١ ± ر١ هـ^ن + ي هـ^{ن+١}

وبناءً على ذلك يتحصل

عَ² + كَ² = ع² + ك² ± ٢ (ك١ ر١ − ع ف) هـ^ن + ي هـ^{ن+١}

وحينئذٍ يرى ان الحدود التالية للحد هـ^ن حقيقية ومحتوية على قوى

النتيجة الأولى

اذا كانت الكمية ذات الحدين س - ه تقسم الكمية الكثيرة الحدود ص كان ه جذراً للمعادلة ص = ٠ لانه قد فرض أن ص = (س - ه) خ وحينئذ الخارج خ تام بالنسبة الى س فاذا حصل في هذه المساواة س = ه فالطرف الثاني ينعدم وحينئذ يؤول الطرف الاول الى الصفر

النتيجة الثانية

واذا جعل س = ه في طرفي المساواة ص = (س - ه) خ + ق فان حاصل (س - ه) خ يؤول الى الصفر وان ق لا يتغير على أي وجه باي مقدار كان ه ومن هنا يؤخذ ان الباقي ق يكون مساوياً للمقدار الذي تحصل الكمية الكثيرة الحدود ص عندما يوضع فيها ه بدل س ويلاحظ ان هذه النتيجة تشتمل على النظرية السادسة لانه اذا كان ه جذراً للمعادلة ص = ٠ كان الناتج من وضع ه بدل س في ص صفراً وحينئذ يكون باقي قسمة ص على س - ه صفراً ايضاً وبناء على ذلك تكون الكمية الكثيرة الحدود ص قابلة للقسمة على س - ه

في مضاريب المعادلات وقواسمها

النظرية السادسة

بند ٢٣٦ اذا كان ح هو الجذر الحقيقي لمعادلة كالمعادلة ٮ = ٠ فان الطرف الاول من المعادلة يكون قابلاً للقسمة على الكمية ذات الحدين س — ح ولذا نقسم الكمية الكثيرة الحدود ٮ على س — ح وحيث أن المقسوم عليه يحتوى على س بدرجة اولى فقط فيتوصل بالعمل الى باقٍ لايحتوى على هذا المتغير ولايكون مقام خارج القسمة محتوياً على المتغير س المذكور فاذا رمز لخارج القسمة بالرمز خ وللباقى بالرمز ق حدث

$$ٮ = (س - ح) \times خ + ق$$

وفى هذه المتساوية اذا جعل س = ح انعدم طرفها الاول وحيث أنه قد فرض أن ح هو جذر المعادلة ٮ = ٠ فينعدم حاصل الضرب (س — ح) خ أيضاً لان المضروب س — ح قد آل الى الصفر ولايمكن أن يكون المضروب خ غير معدوم وأما الباقى ق فانه لم يتغير لانه ليس داخلاً فى س فاذاً يكون هذا الباقى معدوماً واذاً تكون الكمية ٮ الكثيرة الحدود قابلة القسمة على س — ح

$س^{م-١} + ح$	$س^{م-٢} + ح^٢$	$س^{م-٣} + ح^٣$	$س^{م-٤} ... + ح^{م-١}$
$+ ج_١$	$+ ج_١ ح$	$+ ج_١ ح^٢$	$... + ج_١ ح^{م-٢}$
	$+ ج_٢$	$+ ج_٢ ح$	$... + ج_٢ ح^{م-٣}$
		$+ ج_٣$	$... + ج_٣ ح^{م-٤}$
			$... + ...$
			$... + ...$
			$+ ج_{م-١}$

ومن هنا يشاهد أن مكرر كل حد من خارج القسمة يتحصل بالابتداء من الحد الثانى بأن يضرب مكرر الحد السابق عليه فى $ح$ ويضاف إلى حاصل الضرب المكرر الذى يشغل فى كثيرة الحدود $س^م + ج_١ س^{م-١} + ج_٢ ...$ مرتبة الحد الذى يراد تحصيله من خارج القسمة ومكرر الحد الأول من خارج القسمة لا يختلف عن مكرر الحد الأول من كثيرة الحدود المفروضة

بند ٢٣٨ ويمكن أيضاً أن ينبه مهما كانت الكمية $ح$ على أن الطرف الأول من المعادلة (١) يكون دائماً مكافئاً للمقدار

$$س^م - ح^م + ج_١ (س^{م-١} - ح^{م-١}) + ج_٢ (س^{م-٢} - ح^{م-٢}) ... + ج_{م-١} (س - ح)$$
$$+ ح^م + ج_١ ح^{م-١} + ج_٢ ح^{م-٢} ... + ج_{م-١} ح + ج_م$$

وقد برهن المهندس لاجرانج على النظرية السادسة المذكورة بهذه البرهنة وهي اذا فرض أن المعادلة العمومية هي

$$(١)\quad س^{م} + ج_{١} س^{م-١} + ج_{٢} س^{م-٢} + \dots\dots + ج_{م-١} س + ج_{م} = ٠$$

وكان ح هو الجذر لهذه المعادلة تحصل من ذلك المتساوية

$$ح^{م} + ج_{١} ح^{م-١} + ج_{٢} ح^{م-٢} + \dots\dots + ج_{م-١} ح + ج_{م} = ٠$$

فاذا استخرج من هذه المتساوية مقدار $ج_{م}$ ووضع في الطرف الأول من المعادلة (١) آلت كثيرة الحدود المفروضة الى

$$س^{م} + ج_{١} س^{م-١} + ج_{٢} س^{م-٢} + \dots\dots + ج_{م-١} س$$

$$- ح^{م} - ج_{١} ح^{م-١} - ج_{٢} ح^{م-٢} - \dots\dots - ج_{م-١} ح \quad أو$$

$$س^{م} - ح^{م} + ج_{١}(س^{م-١} - ح^{م-١}) + ج_{٢}(س^{م-٢} - ح^{م-٢}) + \dots\dots + ج_{م-١}(س - ح)$$

ولكن حيث أن $س - ح$ يقسم كلا من الكميات $س^{م} - ح^{م}$ و $س^{م-١} - ح^{م-١}$ و نحو فيكون الطرف الأول من المعادلة (١) قابلا للقسمة على $س - ح$ أيضا ويكفي لتحصيل خارج القسمة أن تقسم كلا من الكميات ذات الحدين $س^{م} - ح^{م}$ و $س^{م-١} - ح^{م-١}$ و نحو على $س - ح$ وأن تجمع الخوارج الجزئية على بعضها بعد ضرب خارج القسمة الجزئي الثاني في $ج_{١}$ والثالث في $ج_{٢}$ و نحو فيتحصل

من ذلك معادلة يكون لها جذر كالجذر ء وحينئذ تكون الكمية الكثيرة الحدود قابلة للقسمة على س - ء ويكون الخارج كمية كثيرة الحدود درجتها م - ٢ وبناءً على ذلك يحدث

$$ ص = (س - ح)(س - ء)(ل س^{م-٢} + ل خ) $$

فاذا جعلت الكمية الكثيرة الحدود ل س^{م-٢} + ل خ مساوية للصفر فانه يتحصل من ذلك معادلة يكون لها جذر كالجذر هـ وحينئذ تكون الكمية الكثيرة الحدود المذكورة قابلة للقسمة على س - هـ ويكون خارج القسمة كمية كثيرة الحدود درجتها م - ٣ وبناءً على ذلك يكون

$$ ص = (س - ح)(س - ء)(س - هـ)(ل س^{م-٣} + ل خ) $$

ويمكن أن يتوالى العمل هكذا حتى لا يكون الخارج محتويًا على المتغير س الا بدرجة اولى ويكون كمية ذات حدين كالكمية س - ك وحينئذ تنحل الكمية الكثيرة الحدود المفروضة الى مضاريب بدرجة اولى عددها م وبناءً على ذلك يحدث

$$ ص = (س - ح)(س - ء)(س - هـ) .. (س - ك) $$

وبمقتضى هذا التحليل نشاهد أن الكمية الكثيرة الحدود ص تؤول الى الصفر اذا وضع فيها بدل المتغير س واحد من المقادير ح، ء، هـ ... ك

وحيث أن هذا المقدار الأخير مكون من جزئين أحدهما قابل للقسمة على $س - ح$ والثانى غير محتوٍ على $س$ فيكون هذا الجزء الثانى كناية عن باقى قسمة الكمية الكثيرة الحدود المفروضة على $س - ح$ وحينئذ فقد آلت هذه النتيجة الى المتقدمة فى النتيجة الثانية وبالجملة فيمكن هنا ايراد القواعد المعروفة فى البنود الثلاثة السابقة وذلك بأن تجرى بمقتضى الطرق المعتادة عملية قسمة الكمية الكثيرة الحدود $س^{م} + ب س^{م-١} + ح س^{م-٢} + $ الخ على الكمية ذات الحدين $س - ح$

النظرية السابعة

بند ٣٣٩ أى معادلة ذات درجة جبرية لها دائماً جذور حقيقية أو تخيلية لا تزيد عن درجتها الجبرية مثلاً اذا فرضت المعادلة $ب_{م} = ٠$ نوجد أن لها بالضرورة جذراً حقيقياً أو تخيلياً فاذا رمز اليه بالرمز $ح$ كان الطرف الأول قابلاً للقسمة على $س - ح$ والخارج كمية كثيرة الحدود درجتها $م - ١$ وحينئذ يكون

$$ب_{م} = (س - ح)(س^{م-١} + \text{الخ})$$

فاذا جعلت الكمية الكثيرة $س^{م-١} + $ الخ مساوية للصفر فانه يتحصل

من

وحينئذ لايكون ل جذرًا للمعادلة ه س = ٠ فان وجد لها جذور متساوية بحيث يكون ه س = $(\text{س} - \text{ح})^{\text{م}} (\text{س} - \text{ى})^{\text{ع}}$ لخ فلاتكون الكمية الكثيرة الحدود ه س مساوية لأى حاصل ضرب مكون من مضاريب واحدة ذات أسس متنوعة لانه ان أمكن ذلك بفرض أن

$$(\text{س} - \text{ح})^{\text{م}} (\text{س} - \text{ى})^{\text{ع}} \text{ لخ} = (\text{س} - \text{ح})^{\text{م}'} (\text{س} - \text{ج})^{\text{ع}'} \text{ لخ}$$

وكان م > م' فبقسمة الطرفين على $(\text{س} - \text{ح})^{\text{م}'}$ يحدث

$$(\text{س} - \text{ح})^{\text{م} - \text{م}'} (\text{س} - \text{ى})^{\text{ع}} \text{ لخ} = (\text{س} - \text{و})^{\text{ع}'} \text{ لخ}$$

وحينئذ يؤول الطرف الأول من المتساوية الأخيرة الى الصفر بمقتضى الفرض س = ح ولا يتأتى ذلك فى الطرف الثانى لان كلا من مضاريبه مختلف عن س - ح وحينئذ تكون المتساوية غير ممكنة

وبناء على ذلك لايكون لأى معادلة درجتها م غير جملة واحدة من جذور عددها م متساوية أو غير متساوية

بند (٢٤١) فاذا جعل ه س رمزا لدالة تامة للكمية س التى درجتها م ووفق بين مضاريب الدرجة الأولى من هذه الدالة بضربها فى بعضها مثنى وثلاث فان حواصل الضرب المتحصلة من ذلك تكون كلها قاسمة للدالة ه س ويشاهد بمقتضى النظرية الثانية المقررة

التي عددها م وبناء على ذلك يكون للمعادلة ص = ٠ جذور عددها م

ولا يكون لها جذور غير الجذور ح ، ء ، هـ ، .... ، ك التي عددها م

لانه ان كان لها غير هذه الجذور أمكن تحليل الكمية الكثيرة الحدود ص

الى جمل من المضاريب التي بدرجة اولى وهذا محال (كما في بند ٢١٧)

ويمكن أن تكون بعض المضاريب س - ح ، س - ء ، س - هـ ، الخ متساوية

وفي هذه الحالة تكون جذور المعادلة ص = ٠ متساوية مثلاً اذا كانت

الكمية الكثيرة ص محتوية على ثلاثة مضاريب كل واحد منها يساوى

س - ح فان كل واحد من جذورها الثلاثة يكون مساوياً للمضروب

ح ولذا يقال أن أى كمية درجتها م يكون لها جذور عددها م

بند ٢٢٠ ويمكن البرهنة بقطع النظر عن النظرية المتقدمة (في بند ٢١٧) على

أن أى معادلة بدرجة م لا يكون لها جملة واحدة من الجذور عددها م

مثلاً لنفرض المتساوية

ص = (س - ح) (س - ء) (س - هـ) .... (س - ك)

فاذا فرض فيها المتغير س مقداراً كالمقدار ل مختلف عن كل واحدة

من الكميات ح ، ء ، هـ ، .... ، ك يقال حيث انه لا ينعدم أى مضروب

من مضاريب الطرف الثاني فلا ينعدم حاصل ضرب هذه المضاريب

لكن حيث أن ل + ت $\sqrt{-ب}$ جذر للمعادلة بالفرض فإذا عوضنا …

المقدار ع + ك $\sqrt{-ب}$ مساوياً للصفر … ويؤخذ أن ع = ٠

ك = ٠ فإذاً يكون ع − ك $\sqrt{-ب}$ مساوياً أيضاً للصفر وإذاً يكون

ل − ت $\sqrt{-ب}$ جذراً للمعادلة .

نتيجة أولى

الجذور التخيلية يكون عددها زوجياً في المعادلة ذات معاملات حقيقية

نتيجة ثانية

المضاريب المطابقة للجذور التخيلية في معادلة ذات معاملات حقيقية تحصل منها مضاريب حقيقية … من الدرجة الثانية

لأنه إذا كان المضروبان المطابقان لجذرين تخيليين … هما س − ل − ت $\sqrt{-ب}$

و س − ل + ت $\sqrt{-ب}$ كان حاصل ضربهما المضروب الحقيقي وهو

(س − ل)^2 + ت^2 أو س^2 − ٢ ل س + ل^2 + ت^2

ومن هنا يؤخذ أن الطرف الأول من معادلة له زوجية الدرجة وغير …

المكونات يتحلل دائماً إلى مضاريب حقيقية بدرجة ثانية

إذا كانت المعادلة فردية الدرجة كان لها بالضرورة مضروب …

(نتيجة) أن الكمية الكثيرة الحدود تشتمل أيضاً على القواسم المنتجة من عدد التوافيق وحينئذ يكون عدد قواسم الدرجة الثانية من $\frac{م(م-1)}{1\times 2}$ وعدد قواسم الدرجة الثالثة $\frac{م(م-1)(م-2)}{1\times 2\times 3}$ ...

النظرية الثامنة

(نظرية) إذا كان لمعادلة حقيقية المكررات جذر تخيلي كالجذر $ل + ب\sqrt{-1}$ فإنه يكون لها أيضاً جذر كالجذر $ل - ب\sqrt{-1}$

فإذا وضع $ل + ب\sqrt{-1}$ بدل س في الطرف الأول من هذه المعادلة فإن الحدود المحتوية على الكمية $ب\sqrt{-1}$ المرفوعة إلى قوة زوجية تكون مجردة عن الدلالة التخيلية $\sqrt{-1}$ وهذه الدلالة تكون باقية على حالها في سائر الحدود المحتوية على الكمية $ب\sqrt{-1}$ المرفوعة إلى قوة فردية بحيث إذا رمز للناتج بعد الوضع بالرمز $ع + ف\sqrt{-1}$ كانت ع و ف كميتين حقيقيتين والكمية ع محتوية على قوى زوجية فقط للكمية ب والكمية ف على قوى فردية للكمية ب المذكورة

فإذا وضع في المعادلة المذكورة $ل - ب\sqrt{-1}$ بدل س فإن الناتج المتحصل لا يختلف عن المتقدم إلا باختلاف علامات القوى الفردية للكمية ب وحينئذ يوضع الناتج المذكور هكذا $ع - ف\sqrt{-1}$

لكن حيث

وحيث تقدم أن حاصل الضرب المحتوي على مضاريب عددها م كالمضاريب

س + حـ و س + د و س + هـ و الخ يكون فيه مكرر $س^{م-١}$ هو مجموع كميات .

حـ و د و هـ و الخ ومكرر $س^{م-٢}$ هو مجموع حواصل ضرب هذه الكميات مأخوذة

مثنى ومكرر $س^{م-٣}$ هو مجموع حواصل ضرب هذه الكميات مأخوذة ثلاث

وهكذا الى مكرر الحد الأخير الذي يكون مساويا للحاصل ضرب سائر هذه

الكميات فيكفي للانتقال من حاصل ضرب المضاريب س+حـ , س+د , الخ

الى حاصل ضرب المضاريب س-حـ , س-د , الخ أن تغير علامات الكميات

حـ , د , هـ , الخ فتتغير علامات الحواصل المحتوية على هذه الكميات الداخلة

فيها بعدد فردي وتبقى الحواصل المحتوية عليها بعدد زوجي بعلاماتها .

وحينئذ يثبت المطلوب وهذه الارتباطات التي عددها كدرجة المعادلة لا يمكن

أن تستخرج منها جذور هذه المعادلة لانه يتوصل بواسطة حذف الجذور واحدا بعد واحد

الى معادلة لا تختلف عن المعادلة المفروضة الا بكون أحد الجذور داخلا فيها بدل س ولنعتبر المعادلة ذات الدرجة الثالثة

$$س^{٣} + ب_{١} س^{٢} + ب_{٢} س + ب_{٣} = ٠$$

فاذا جعلت حـ , د , هـ رموز الجذور الثلاثة فانه يتحصل بمقتضى

النظرية السابقة المعادلات الثلاث

$$-حـ - د - هـ = ب_{١} \ , \ حـ د + حـ هـ + د هـ = ب_{٢} \ , \ -حـ د هـ = ب_{٣}$$

حقيقى بدرجة اولى (كما فى بند ٢٣١) وبقسمتها على هذا المضروب تؤول الى معادلة زوجية الدرجة .

فى الارتباطات الواقعة بين مكررات المعادلة وجذورها

النظرية التاسعة

بند ٢٤٣ حيث أنّ مكرر اعلى قوة للمجهول هو الواحد فى المعادلة المحولة الى الصورة

$$س^{م} + ح_{١} س^{م-١} + ء_{١} س^{م-٢} + ه_{١} س^{م-٣} + \cdots + ك_{١} = ٠$$

فيكون مكرر الحد الثانى المأخوذ بعلامة مخالفة لعلامته مساويًا لمجموع الجذور ومكرر الحد الثالث مساويًا لمجموع حواصل ضرب الجذور مأخوذةً مثنى ومكرر الحد الرابع المأخوذ بعلامة مخالفة لعلامته مساويًا لمجموع حواصل ضرب الجذور مأخوذةً ثلاث ثلاث ومكرر الحد الأخير المأخوذ بعلامته ان كانت درجة المعادلة زوجية وبعلامة مخالفة لعلامته ان كانت درجتها فردية مساويًا لحاصل ضرب جميع الجذور

مثلًا اذا جعلت ح ، ء ، ه ،.... ، ك رموزًا لجذور معادلة عددها م فيكون طرفها الأول مساويًا لحاصل الضرب

$$(س - ح)(س - ء)(س - ه) \cdots\cdots (س - ك)$$

وحيث

وبوضع ص - ر بدل س فى المعادلة (١) تتحصل المعادلة المطلوبة

لانه يحدث بعد الاستبدال

$$(ص - ر)^م + ج_١ (ص - ر)^{م-١} + ج_٢ (ص - ر)^{م-٢} + \cdots + ك = ٠ \quad \ldots\ldots (٢)$$

وهذه المعادلة تحقق الشرط المفروض لان الناتج الحادث

من وضع ح بدل س فى المعادلة (١) لا يختلف عن الناتج الحادث

من وضع ح + ر بدل ص فى المعادلة (٢) وبناء على ذلك اذا كان

ح جذراً من جذور المعادلة الاولى كان ح + ر جذراً من جذور المعادلة

الثانية

ويمكن ايضاً التوصل الى هذا الناتج بواسطة وضع الطرف الاول

من المعادلة على صورة حاصل ضرب مضاريب بدرجة اولى

لانه اذا فرض أن ح ، ى ، هـ ، .... ك هى الجذور كان الطرف

الأول المذكور مكافئاً لحاصل الضرب

$$(س - ح)(س - ى)(س - هـ) \ldots (س - ك)$$

فاذا وضع ص - ر بدل س فان هذا الحاصل يتحول الى

$$[ص - (ح + ر)][ص - (ى + ر)][ص - (هـ + ر)] \ldots [ص - (ك + ر)]$$

وحينئذ تكون جذور المعادلة المحولة بعد الاستبدال هى ح + ر ، ى + ر ، ...

وأسهل طريقة تستعمل فى حذف ى و هـ من بين هذه المعادلات هى أنها تجمع على بعضها بعد أن تضرب المعادلة الاولى فى $ح^٢$ والثانية فى ح فنتحصل من ذلك المعادلة

$$ح^٣ + ج_١ ح^٢ + ب_١ ح + ه_١ = ٠$$

وهذه المعادلة لا تختلف عن المعادلة المتقدمة الا بوضع ح بدل س وحينئذ يؤخذ من التوضيحات السابقة أنه يتوصل دائماً الى معادلة لا تختلف عن المعادلة المفروضة على اى وجه كانت طريقة الحذف

فى تحويل المعادلات

بند ٢٤٤ من المفيد فى الغالب لسهولة تعيين جذور معادلة ان تجرى على هذه المعادلة بعض تحويلات الغرض منها أن تضاف الى كل من جذور معادلة أو تطرح منها كمية أو تضرب فى كمية أو تقسم عليها مثلاً اذا فرضت المعادلة

$$س^م + ج_١ س^{م-١} + ب_١ س^{م-٢} + \ldots\ldots + ك_١ = ٠ \ldots\ldots (١)$$

فلتحويل هذه المعادلة الى اخرى تكون جذورها مساوية لجذور هذه المعادلة مضافاً اليها كمية نفرض أن

$$ص = س + د \quad فيكون \quad س = ص - د$$

وبوضع

$$س = ص - \frac{ح}{م}$$

وعلى ذلك يلزم لتحويل معادلة الى اخرى ينقص عنها الحد الثانى أن يوضع بدل المجهول س مجهول آخر ص يضاف اليه المكرر ح من الحد الثانى فى المعادلة المفروضة مأخوذاً بعلامة مخالفة لعلامته ومقسوماً على درجة المعادلة فتكون جذور المعادلة المحولة مساوية لجذور المعادلة المفروضة مضافاً اليها $\frac{ح}{م}$

ويسهل بواسطة الخواص المعروفة فى شأن تركيب المكررات مع الجذور توضيح القاعدة السابقة لان الجذور اذا اضيف اليها $\frac{ح}{م}$ زاد مجموعها بمقدار $م \times \frac{ح}{م}$ أى بمقدار ح وحيث ان هذا المجموع كان يساوى فى مبدأ الأمر $-ح$ فيكون مجموع جذور المعادلة الجديدة مساوياً للصفر وبناء على ذلك يكون مكرر الحد الثانى معدوماً

واذا اريد حذف الحد الثالث من المعادلة (٤) يجعل مكون مساوياً للصفر فتكون من ذلك معادلة بدرجة ثانية يؤخذ منها مقدار ان للكمية ر واذا حذف الحد الرابع تحصلت من ذلك معادلة بدرجة ثالثة والخ واذا حذف الحد الأخير كانت المعادلة التى يطلب حلها شابهة للمعادلة المفروضة

٤٩٥ لماذا اريد تنقيص جميع جذور المعادلة (١) بكمية واحدة فان ذلك لايختلف عما نحن بصدده الا بشئ واحد وهو أن $ر$ تكون كمية سالبة وحينئذ اذا وضعت هذه الكمية بالصورة $-ر$ آلت المعادلة المذكورة بعد التحويل الى

$$(ص+ر)^{م} + جـ_{١}(ص+ر)^{م-١} + ء_{١}(ص+ر)^{م-٢} + \dots + ك_{١} = ٠ \quad \dots\dots (٣)$$

وهذا التحويل يستعمل في تغيير معادلة بأخرى لاتكون محتوية على قوة معينة للمجهول وبتحليل القوى المتنوعة للكمية ذات الحدين $ص+ر$ في المعادلة (٣) تؤول هذه المعادلة الى

$$ص^{م} + \left\{\begin{matrix} م\,ر \\ + جـ_{١} \end{matrix}\right| ص^{م-١} + \left.\begin{matrix} \frac{م(م-١)}{٢}\,ر^{٢} \\ + (م-١)\,جـ_{١}\,ر \\ + ء_{١} \end{matrix}\right| ص^{م-٢} + \dots + \left\{\begin{matrix} ر^{م} \\ + جـ_{١}\,ر^{م-١} \\ + ء_{١}\,ر^{م-٢} \\ + \vdots \\ ك_{١} \end{matrix}\right\} = ٠$$

واذا اريد جعل هذه الكمية غير محتوية على القوة $م-١$ للمتغير $ص$ فانه يلزم أن يكتب $م\,ر + جـ_{١} = ٠$ ومن هنا ينتج $ر = -\frac{جـ_{١}}{م}$

وحينئذ يؤول القانون $س = ص + ر$ الى

$س =$

وهذه بقدور ... [illegible] ... فيكون

[illegible]

وحينئذ يشاهد انه ... [illegible] ... من المعادلة المحولة كل من الحدين ...

لكنه لا يمكن في جميع الاحوال حذف عدة حدود من معادلة ... واحدة بمجرد

... [illegible] ... الحدود ... حذف

احد الحدود موجودة ... [illegible] ... المعادلة ... [illegible]

... ويلزم ... [illegible] ... وهذه

المعادلة ... [illegible]

[illegible]

[illegible]

وهذا واضح لانه متى انعدم الحد الأخير من المعادلة (٤) كان أحد جذور هذه المعادلة مساوياً للصفر وحيث أن هذه الجذور هي عين جذور المعادلة المفروضة مطروحاً من كل واحد منها ر فلكي ينعدم أحدها يلزم أن تكون الكمية ر المذكورة جذراً من جذور المعادلة المفروضة

بند ٢٤٦ ولنمثل لحذف الحد الثاني بمثال هو لنفرض المعادلة

$$س^{٥} + ٥ س^{٤} + س^{٣} - ١٦ س^{٢} - ٢٠ س - ١٦ = ٠ \quad ...... (٥)$$

ثم بوضع فيها ص − ١ بدل س فتتحول الى المعادلة

$$ص^{٥} - ٩ ص^{٣} + ص^{٢} - ٩ = ٠$$

وهذه المعادلة يمكن وضعها بالصورة

$$(ص^{٢} - ٩)(ص^{٣} + ١) = ٠$$

وحينئذ يشاهد انها قد انقسمت الى جزئين هما

$$ص^{٢} - ٩ = ٠ \quad و \quad ص^{٣} + ١ = ٠$$

فأما الجزء الأول فيحصل منه ص = + ٣ و ص = − ٣ وأما الثاني فيحدث منه بمقتضى ما تقدم في (بند ١٥٤)

$$ص = -١ \quad و \quad ص = \frac{١}{٢}(١ + \sqrt{-٣}) \quad و \quad ص = \frac{١}{٢}(١ - \sqrt{-٣})$$

ومن هنا يؤخذ أنه يكون للمعادلة (٥) ثلاثة جذور واثنان منها تخيليان

بالنسبة [illegible] وجهة

[illegible]

غير محتوية على [illegible] موجب

و [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] في المقدمة [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] أيضاً الحد الثاني [illegible]

[illegible] المعادلة [illegible] فإنه يحول

[illegible] وجهها ويحصل بالنسبة لكل

واحد [illegible] من التغير [illegible] مقداران متساويان ومختلفان

في العلامة فقط

فان كان م د الأعلى عدد زوجي فانه يترتب على وضع ـ ص بدل
س تغيير علامات سائر الحدود الزوجية المرتبة بالابتداء من
الحد الأول أما الحدود الفردية المرتبة فلا تتغير علاماتها وان كان
م د الأعلى عدد فردي فانه يترتب على ذلك تغيير علامات الحدود
الفردية المرتبة أما الحدود الزوجية فلا تتغير علاماتها وحينئذ
يلزم لكي يكون الحد الأول موجبا ان تغير علامات سائر الحدود في
المعادلة الناتجة وينتج من ذلك أن تغيير علامات جذور معادلة
بعد ان توضع فيها لتصير تامة الحدود الناقصة منها
ويجعل الصفر مكررا لكل واحد من هذه الحدود لا يحصل
الا بتغيير علامات الحدود الزوجية المرتبة فقط

٢٦٩ اذا كانت جميع حدود المعادلة المحولة الى الصورة الاعتيادية
متحدة في العلامة فلا تكون محتوية على جذر موجب لانه يحدث
من وضع مقدار موجب بدل س في الطرف الأول من المعادلة جملة
من الكميات الموجبة لا يمكن أن تكون معدومة

هذه الملحوظة يؤخذ منها هو القاعدة المقررة في شأن تغيير
علامات الجذور ان المعادلة التامة التي تكون حدودها موجبة وسالبة

(٩ ع)

$$س^{٥} - ٣ س^{٤} - ٢ س^{٣} + س^{٢} - س - ١ = ٠$$

تحتوى على ثلاث مغايرات هى واحدة بين الحد الأول والثانى وواحدة بين الثالث والرابع وواحدة بين الرابع والخامس وعلى مداومتين احداهما بين الحد الثانى والثالث والاخرى بين الخامس والسادس

ومن البديهى فى كل معادلة تامة ان عدد المغايرات والمداومات يساوى درجة هذه المعادلة

والنظرية المعروفة بقاعدة العلامات للمعلم ديكارت لا تخرج عن هذه النظرية

النظرية العاشرة

بند (٥) لا يلزم فى كل معادلة تامة أو غير تامة ان عدد الجذور الموجبة يزيد عن عدد المغايرات

فاذا فرض فى مبدأ الأمر أنه قد تحصل حاصل ضرب المضاريب المطابقة لكل من الجذور التخيلية والسالبة للمعادلة فانه يلزم لتحصيل الطرف الأول من هذه المعادلة ان يضرب على التوالى الحاصل المذكور فى جميع المضاريب المطابقة للجذور الموجبة وحينئذ لا تتحقق هذه النظرية الا اذا شوهد عند ضرب كمية كثيرة الحدود فى مضروب كالمضروب

فاذا كان كل اثنين منجذور معادلة متساويين ومتخالفين في العلامة فان المعادلة لا تشتمل الا على قوى زوجية للمجهول ولذا يمكن البحث عن الجذور مبينة هكذا

+ح و −ح و +ء و −ء و +ه و −ه ولخ

فيكون الطرف الاول من المعادلة كناية عن حاصل ضرب المضاريب

س−ح و س+ح و س−ء و س+ء و س−ه و س+ه ولخ

المساوي لحاصل ضرب المضاريب ذات درجة الثانية

س٢−ح٢ و س٢−ء٢ و س٢−ه٢ ولخ

ولما كانت هذه المضاريب لا تحتوي الا على قوى زوجية للمجهول س كان حاصل ضربها كذلك

في عدة العلامات لمعلم ديكارت

اذا فرضت جملة حدود مسبوقة بالعلامتين + و − اطلق على تغيير العلامات لحاصل متحد الى تاليه اسم المغايرة واذا لم يجز على حدين اثنين تغيير في العلامة اطلق على ذلك اسم المداومة

مثلاً المعادلة

فمقتضى ما تقرر ثانياً أنه إذا كانت حدود المضروب تكون متحدة في العلامة الجبرية الكبيرة لحدود في س محتوية المجهول س بالأسس $م-ج+١$ و $م-ح+١$ و $م-ك+١$. فإن كانت حدود ومتحدة في العلامة مع الحدود المحتوية على س بهذه الأسس في حاصل ضرب المضروب في $س - ب$ أيضاً فيه تكون الحدود المحتوية على المجهول س بهذه الأسس في حاصل الضرب الكلي متحدة في العلامة أيضاً

إذا تقرر هذا شوهد أنه يوجد في المضروب مغايرة واحدة بين الحد الأول $س^{م}$ الى الحد $-ج\,س^{م-ج}$ وأنه يوجد في حاصل الضرب بالأقل مغايرة واحدة من الحد الأول $س^{م+١}$ الى الحد $-ج'\,س^{م-ج+١}$ لأن هذين الحدين مختلفان في العلامة وكذا لا يوجد في المضروب إلا مغايرة واحدة من الحد $-ج\,س^{م-ج}$ الى الحد $+ح\,س^{م-ح}$ ويوجد في حاصل الضرب بالأقل مغايرة واحدة بين الحدين $-ج'\,س^{م-ج+١}$ و $+ح'\,س^{م-ح+١}$ ومن هنا يرى أن عدد المغايرات الذي يوجد في حاصل الضرب الى الحد $\pm ك'\,س^{م-ك+١}$ يكون بالأقل مساوياً لعدد المغايرات الذي يوجد في المضروب الى الحد

[illegible]

[illegible]

[illegible] الكمية [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

هو الحد الأخير تكون كلها متحدة في الصورة

وبضرب هذه الكمية الكثيرة الحدود والمفروضة المشروحة [illegible]

يحدث

س ^{ن+١} − جـ	س ^{ن−١+١} ... + ع	س ^{ن−٢+١} ... ± ل	[illegible] س ^{ن−[illegible]+١} ... [illegible]
−	+	±	[illegible]

س ^{ن+١} − جـ س ^{ن−١+١} ... + ع س ^{ن−٢+١} ... ± ل س ^{ن−[illegible]+١} ... ∓ [illegible]

[illegible] [illegible] فيمنتهي

ويشاهد ايضاً بمقتضى النظريتين المذكورتين (في بندى ١٣٠ ، ١٣١) انه يلزم ان يكون الحد الأخير من حاصل ضرب المضاريب المطابقة للجذور السالبة والتخيلية موجباً وبناءً على ذلك اذا كان هذا الحاصل محتوياً على مغايرات فلا تكون الا زوجية العدد وحيث أن كل واحد من المضاريب المطابقة للجذور الموجبة يشتمل على عدد فردى من المغايرات فاذا كان عدد المغايرات اكبر من عدد الجذور الموجبة فيكون أكبر منه بعدد زوجي

... ان علامات جذور معادلة تتغير كلها عند وضع ... من النظرية السابقة ان عدد الجذور ... عدد مغايرات المعادلة المحولة التي ... س ... س

... كانت المعادلة تامة فانه لا يترتب على وضع − س بدل س ... علامات الحدود الزوجية المرتبة (كما في بند ٢٤٨)

... على ذلك تحول المغايرات الى مداومات وبالعكس وحينئذ يتحقق في معادلة تامة ان يكون عدد الجذور السالبة أكبر من عدد المداومات

+ ك س م-ك+١ لكنه لا يوجد بالابتداء من هذا الحد في المضروب مغايرة ما وأما حاصل الضرب فانه يوجد فيه من ابتداء الحد ك س م-ك+١ الى الحد الأخير + ر مغايرة واحدة بالأقل وبناء على ذلك تكون المغايرات الموجودة في حاصل الضرب أكثر من المغايرات الموجودة في المضروب ولو بمغايرة واحدة

بند اذا تحصل من عملية الضرب في مضروب واحد مطابق لجذر ر موجب عدة مغايرات فلا يكون عددها الا فرديا لانه اذا فرض في مبداء الأمر أن الحد الأخير من المضروب مسبوق بعلامة + لزم إن تغيرت علامات الضرب أن يكون عدد التغيرات زوجيا على أن عدد المغايرات الموجودة في المضروب يكون صفرا او عددا زوجيا فيكون عدد المغايرات الموجودة في حاصل الضرب فرديا واذا كان الحد الأخير من المضروب المذكور مسبوقا بعلامة − كان عدد المغايرات الموجودة في الكمية الكثيرة الحدود المفروضة فرديا وفي هذه الحالة يكون الحد الأخير من حاصل الضرب مسبوقا بعلامة + ويكون عدد مغايراته زوجيا وبناء على ذلك يكون عدد مغايرات حاصل الضرب مختلفا دائما عن عدد مغايرات المضروب بعدد فردي

وبشاهد

من حدود متوالية عددها $ع+١$ كالمتسلسلة $\pm ح\, س^{م} \pm ع\, س^{م-١}$
$\ldots \pm ع\, س^{م-ع+١} \pm ط\, س^{م-ع}$

فانه يحصل من هذه الحدود المتسلسلة في المعادلة المفروضة وفي المعادلة المحولة مغايرات عددها $ع$ فان قطع النظر عن سائر حدود هذه المتسلسلة ماعدا احدها الأول وهو $\pm ح\, س^{م}$ والاخير وهو $\pm ط\, س^{م-ع}$ يتولد من ذلك حالتان متباينتان احداها الحالة التي يكون فيها $ع$ زوجيًا والثانية التي يكون فيها $ع$ فرديًا

فاذا وضع في الحالة الاولى $-س$ بدل $س$ في المعادلة فإما ان تتغير علامة الحدين $\pm ح\, س^{م}$ و $\pm ط\, س^{م-ع}$ وإمّا ان لاتتغير وبنآ على ذلك ان تخالف هذان الحدان في العلامة تحصل منهما في المعادلة المفروضة والمحولة مغايرتان وان اتحدا في العلامة فلا يحصل منهما مغايرة ما واذا وضع في الحالة الثانية $-س$ بدل $س$ في المعادلة فان علامة أحد الحدين المذكورين لاتتغير وأما علامة الآخر فانها تتغير وبنآ على ذلك ان تحصل منهما في المعادلة المفروضة مغايرة فلا يحصل منهما في المحولة مغايرة مثلها وبالعكس

وهذا لا يتأتى إذا كانت المعادلة غير تامة لانه اذا فرضت المعادلة س٣ − ٢س + ١ = ٠ مثلاً شوهد انها لا تشتمل على مداومة واحدة مع انها تشتمل على جذر سالب بالأقل (كما في بند ١٣٠)

بند ٢٥٤ اذا جعل ت رمزاً لعدد مغايرات معادلة ن ، ثَ رمزاً لعدد مغايرات المعادلة المحولة المتحصلة من وضع − س بدل س فلا يمكن ان يكون عدد الجذور الحقيقية للمعادلة اكبر من ت + ثَ وحينئذ اذا كان هذا المجموع اقل من الدرجة م كان بالضرورة في جذور المعادلة تخيلية

مثلاً لنفرض المعادلة س٣ − ٢س + ١ = ٠ التي يكون فيها ت = ٢ فاذا وضع فيها − س بدل س كان ثَ = ١ وحينئذ يكون ت + ثَ = ٣ وبناء على ذلك يكون للمعادلة جذران تخيليان بالأقل

وحيث ان المجموع ت + ثَ لا يزيد دائماً عن الدرجة م فان كان أقل منها فان الفرق بينهما يكون عدداً زوجياً لانه ان كانت المعادلة تامة كان المجموع ت + ثَ مساوياً لعدد المغايرات والمداومات المساوي للدرجة م وحينئذ يلزم اختبار الحالة التي تكون فيها المعادلة ناقصة بعض حدود فيقال اذا اعتبرت متسلسلة مركبة

من حدود

نقصت قوة واحدة للمتغير س بين حدين متحدين في العلامة كان بين
جذور المعادلة جذران تخيليان بالأقل فان نقصت المعادلة قوى
متوالية عددها ع-١ للمتغير س وكان ع عددا زوجيا كانت
عدد الجذور التخيلية للمعادلة مساويا بالأقل ع-٢ متى كانت
الحدود التي توجد بينها هذه القوى المحذوفة للمتغير س متخالفة
في العلامة أو انه يكون مساويا بالأقل العدد ع متى كانت الحدود
المذكورة متحدة في العلامة فان كان ع عددا فرديا كان للمعادلة
بالأقل جذور تخيلية عددها ع-١

سند ٥٤ ومتى كانت جميع جذور معادلة حقيقية كان عدد الجذور
الموجبة مساويا لعدد المغايرات الموجودة في المعادلة وعدد الجذور
السالبة مساويا لعدد المغايرات الموجودة في المعادلة المحولة المتحصلة
من وضع -ص بدل س

لانه اذا جعل ت رمزا للعدد الأول من المغايرات و ث رمزا
للعدد الثاني منهما و ع رمزا لعدد الجذور الموجبة و ح رمزا
لعدد الجذور السالبة و م رمزا لدرجة المعادلة فحيث أن
سائر الجذور حقيقية فيكون ع+ح=م وحيث أن المجموع ت+ث

ومن هنا يؤخذ أولاً اذا كان ع = د كما في الحالة التي يحذف فيها
من المعادلة غير حد واحد أن المجموع ت + تَ يكون مساوياً للدرجة م
ان كان الحدان اللذان يوجد بينهما الحد المحذوف متخالفين في العلامة
ويكون المجموع المذكور مساوياً للدرجة م - د ان كانا متحدين في العلامة
وثانياً انه اذا كان ع عدداً زوجياً اكبر من د فبعد حذف
سائر الحدود المحصورة بين ± ﻫ سَ ه ± ط سَ ع-د يكون
المجموع ت + تَ مساوياً للدرجة م - (ع - د) أو م - ع بحسب
ما يكون الحدان ± ﻫ سَ ه ± ط سَ ع-د متخالفين في العلامة
أو متحدين فيها وثالثاً انه اذا كان ع عدداً فردياً فان المجموع
ت + تَ يكون بعد حذف الحدود المحصورة بين الحدين
± ﻫ سَ ه ± ط سَ ع-د مساوياً للدرجة م - ع + ١ وحينئذ
يكون المجموع ت + تَ في معادلة غير تامة مساوياً دائماً في النهاية
لدرجة هذه المعادلة فان كان اقل منها كان الفرق بينهما عدداً زوجياً
ويشاهد زيادة على ذلك انه اذا نقصت قوة واحدة من قوى
المتغير س بين حدين متخالفين في العلامة وكان المجموع ت + تَ
مساوياً للدرجة م أمكن أن تكون سائر الجذور حقيقية واذا
نقصت

هذا المعروفان بنهايتي الجذور وقد تقدم (في بند ١٢٦) انه يوجد دائماً عدد يكون كل واحد من مقادير المجهول اكبر منه وانه يترتب على كل واحد منها ان الطرف الأول من المعادلة تكون له مقادير متحدة في العلامة مع الحد الأول ومن البديهي أن هذا العدد هو النهاية الكبرى لجذور المعادلة ولبيان الكيفية التي بها يمكن ايجاد هذه النهاية يبرهن في مبدأ الأمر على ان الحد الأول من المعادلة الذي يفرض موجباً يكون اكبر من مجموع الحدود السالبة عندما يفرض للمتغير س مقدار موجب أو مقدار اكبر منه لانه اذا حولت سائر الحدود الموجبة من المعادلة الى طرف ما عدا الحد الأول تحصلت من ذلك كمية كثيرة الحدود كالكمية

$$\text{س}^{\text{م}} - \text{ج}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ع}} - \text{أ}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ح}} - \text{هـ}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ك}} - \text{الخ}$$

فاذا وضعت المباينة

$$\text{س}^{\text{م}} > \text{ج}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ع}} + \text{أ}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ح}} + \text{هـ}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ك}} + \text{الخ}$$

فانه يشاهد انها تتحقق اذا تحصلت المباينة

$$1 > \frac{\text{ج}}{\text{س}^{\text{ع}}} + \frac{\text{أ}}{\text{س}^{\text{ح}}} + \frac{\text{هـ}}{\text{س}^{\text{ك}}} + \text{الخ}$$

التي يكون طرفها الثاني صغيراً بقدر ما يكون مقدار المتغير س

لا يزيد عن المجموع ت + تَ الذى يساوى فى النهاية الدرجة م فيلزم أن يكون

ت + تَ = م أو ت + تً = ح + ح

اذا تقرر هذا وكان ح أقل من ق فانه يلزم ان يكون حَ > قَ

وهذا مستحيل وحينئذ يكون ح = ق و حَ = تً

فاذا كانت المعادلة تامة فان عدد مغايرات المعادلة المحولة يكون مساويًا لعدد مداومات المعادلة المفروضة وفى هذه الحالة اذا كانت جميع الجذور حقيقية كان عدد الجذور السالبة مساويًا لعدد المداومات

الباب العاشر

فى البحث عن الجذور الحقيقية للمعادلات الرقمية ذات المجهول الواحد وفى نهايات الجذور

١٠٥ الطرق التى بها تتعين الجذور الحقيقية لمعادلة هى من الطرق التخيلية وأول مسئلة توضع لحصر هذه الطرق التخيلية عنوانه يلزم ايجاد عددين تكون الجذور محصورة بينهما وهذان العددان

[illegible] وطوبية [illegible]

وحيث تكون حدود الطرف [illegible] بحدود [illegible] لها وجب علينا

أن نتصدى لذكرها فنقول

لنفرض المعادلة

$$س^{م} \pm ج س^{م-١} \pm أ س^{م-٢} \pm \ldots \pm ل = ٠$$

التي يرى فيها أن العلامتين + و − موضوعتان امام كل من

حدود هذه المعادلة ما عدا حدها الأول ينتج من ذلك أن هذه

الحدود قد تكون موجبة وقد تكون سالبة

فاذا جعل ج [illegible] [illegible] تكون [illegible] ب [illegible]

السالبة

$$[illegible] \quad م_{م} س^{م-١} + \ldots + م_{١} س + م_{٠}$$

فرض [illegible] حتى أن المقدار [illegible] يحتوي المتغير س ويكون [illegible] الحد

[illegible] الأول س [illegible]

[illegible] التي تشتمل عليها المعادلة

وحيث أن الكمية الكبيرة الحدود

$$م س^{م-١} + ج س^{م-٢} \ldots + م_{١} س + م_{٠}$$ لا تختلف عن الكمية الكبيرة

كبيرًا ويكون طرفها الأول ثابتًا وحينئذ اذا تحققت هذه المباينة بمقدار كالمقدار ل الذي يفرض فيها للمتغير س فانها تتحقق أيضًا بأي مقدار يفرض للمتغير س بشرط أن يكون هذا المقدار أكبر من المقدار ل المذكور .

فاذا فرض للمتغير س مقادير لا تزال آخذة في الزيادة بالابتداء من س = ل فان

الطرف الاول من المعادلة يأخذ مقادير لا تزال آخذة ايضًا لان الكمية الكثيرة الحدود س − ج [illegible]
لا تختلف عن الكمية الكثيرة الحدود [illegible]

وحينئذ اذا فرض للمتغير س مقادير لا تزال آخذة في الزيادة بالابتداء من س = ل فان المضروب س^م يأخذ في الزيادة هو والكمية المحصورة بين القوسين ايضًا وان كانت المعادلة محتوية على حدود موجبة فان كل واحد منها يزداد مع س وحينئذ لا يزال مقدار الطرف الاول آخذًا في الزيادة

وحينئذ ويسهل بواسطة بعض تجاريب تعيين مقدار للمتغير س به يكون الطرف الاول من معادلة أكبر من مجموع الحدود السالبة [illegible] [illegible]

وحينئذ

وحيث أن الحد $- ف س^{م-ك}$ هو سالب وأن الحدود التالية له قد تكون موجبة وقد تكون سالبة فإذا جعل $ح_1$ رمزاً للمقدار المطلق لأكبر معامل سالب ووضعت المباينة

$$س^{م} > ح_1 س^{م-ك} + ح_1 س^{م-ك-1} + \cdots + ح_1 س + ح_1$$

شوهد أن كل مقدار يفرض للمتغير س ويكون محققاً لهذه المباينة يصير الحد الأول $س^{م}$ أكبر من مجموع سائر الحدود السالبة التي توجد في المعادلة وحيث أن المباينة المذكورة تؤول إلى المباينة

$$س^{م} > ح_1 \frac{س^{م-ك+1}-1}{س-1}$$

فإذا كان لا يبحث عن مقدار المتغير س إلا بين الأعداد التي تزيد عن الواحد فإنه يكفي لذلك أن يكون

$$س^{م} > ح_1 \frac{س^{م-ك+1}}{س-1} \quad أو \quad س^{ك-1}(س-1) > ح_1$$

وحينئذ لا يتحقق هذا الشرط الأخير إلا إذا كان

$$(س-1)^{ك-1}(س-1) = أو > ح_1 \quad أو كان \quad (س-1)^{ك} = أو > ح_1$$

ومن هنا ينتج

$$س = أو > 1 + \sqrt[ك]{ح_1}$$

وحينئذ يؤخذ من ذلك أيضاً أنه يلزم لإيجاد نهاية كبرى للجذور

الحدود

$م_١ (س^{م-١} + س^{م-٢} + \dots + س + ١)$ أو $\frac{م_١ (س^م - ١)}{س - ١}$

فيمكن وضع المباينة السابقة هكذا :

$س^م > \frac{م_١ (س^م - ١)}{س - ١}$

وحيث أن مقدار المتغير س لا يكون الا من الاعداد التي تزيد عن الواحد كما يفهم ذلك من منطوق المسألة فيكفي لذلك أن يكتب

$س^م =$ أو $> \frac{م_١ س^م}{س - ١}$

ومن هنا ينتج

$س - ١ =$ أو $> م_١$ ومنها يحدث $س =$ أو $> ١ + م_١$

وبناء على ذلك يؤخذ من هنا انه يلزم لتعيين النهاية الكبرى للجذور الموجبة لكل معادلة ان يضاف الى الواحد المقدار المطلق لأكبر مكرر سالب

بند ٥٧ اذا كانت الحدود السالبة لا تبتدئ بعد الحد الأول مباشرة أمكن تحصيل نهاية أصغر من النهاية السابقة

ولبيان ذلك نفرض المعادلة

$س^م \dots - ف_١ س^{م-٢} \pm ع_١ س^{م-٢-١} \dots \pm ك_١ = ٠$

وحيث

(كما في بند ٤٩٩) فاذاً لا يكون للمعادلة المفروضة د(س) = ٠ جذر أكبر من ح واذاً يكون هذا العدد هو النهاية الكبرى للجذور الموجبة للمعادلة د(س) = ٠

ولتحصيل عدد كالعدد ح به تصير جميع الدلالات د(س) و دَ(س) و دً(س) و الخ موجبة تعتبر في ابتداء الأمر المشتقة ذات المرتبة م-١ التي لا تشتمل على المتغير س الا بدرجة اولى ثم يعين لهذا المتغير مقدار يصيّرها موجبة ثم يوضع هذا المقدار في المشتقة ذات المرتبة م-٢ فان كان الناتج المتحصل سالباً فانه يلزم أن يزاد مقدار المتغير س عن أصله واحداً فواحداً وهكذا بطريق التوالي الى ان يتوصل الى عدد يتحصل منه ناتج موجب ثم يتوالى العمل بهذه المثابة في الدلالات المتوالية الى الدلالة د(س)

فاذا كان عدد كالعدد حَ يصيّر المشتقات موجبة من ابتداء المشتقة ذات المرتبة م-١ الى المشتقة ذات المرتبة ح وأضيف الى هذا العدد بالتوالي واحداً وعدة آحاد حتى توصل الى المشتقة ذات المرتبة ح-١ فلكي تكون موجبة يلزم أن يتحقق ان المقدار الجديد الذي يفرض للمتغير س يصيّر آخر المشتقات

الموجبة انه يضاف الى الواحد جذر المقدار المطلق لاكبر المكورات السالبة الذى تكون درجته هى الفاصل بين درجة المعادلة واس اول حد سالب

تنبيه

اذا كان المكور م أصغر من الواحد فان النهاية ١+م تؤثر فى الاول على النهاية المتحصلة بواسطة القاعدة السابقة

تنبيه ويمكن ايضا تحصيل نهاية كبرى للجذور الموجبة بطريقة المعلم نيوتون وهى

انه اذا فرضت المعادلة د(س)=٠ واريد تحصيل معادلة أخرى حقيقية الجذور لاتختلف جذورها عن جذور المعادلة المفروضة الا بكون كل واحد منها ينقص عن نظيره بكمية واحدة كالكمية ع لزم أن يوضع ص=س−ع ومن هنا يؤخذ أن س=ص+ع فتكون المعادلة المحولة د(ص+ع)=٠ أو

$$\text{د}(\text{ع})+\text{دَ}(\text{ع})\,\text{ص}+\text{دً}(\text{ع})\frac{\text{ص}^{٢}}{١\times٢}+\text{د}'''(\text{ع})\frac{\text{ص}^{٣}}{١\times٢\times٣}+\text{الخ}=٠$$

اذا تقرر هذا وتعين العدد ع على وجه بحيث تكون جميع حدود المعادلة السابقة موجبة فانه لايكون لهذه المعادلة جذر موجب

(كما فى)

فاذا اجرى هذا التحويل ...

للنهاية الصغرى نجد ...

بعد ان يقسم على المجهول ... متكرر مخالفة لعلامة الحد الاخير ...

وتحصل نهايات الجذور السالبة بهذه الكيفية وهي ان يوضع في المعادلة

$-س$ بدل $س$ ويبحث بعد التحويل عن نهايات الجذور الموجبة

لهذه المعادلة

ونحن نتبع غالبًا في البحث عن هذه النهايات حدود الموجبة الداخلة

٢٦١

في اي معادلة كانت الامثلة الآتية وهي

$$س^8 - ٤ س^7 + ١٣ س^6 - س^5 - ١٨ س^4 + ٣ س^3 - ١٠٠ س + ١٠٠٠ = ٠$$

التي يمكن وضعها بالصورة

$$س^7 (س - ٤) + ١٣ س^4 (س^2 - \frac{١}{١٣} س - \frac{١٨}{١٣}) + ٣ (س^3 - \frac{٥٠}{٣} ...) + (...) = ٠$$

فيشاهد ان ... لا يكون ... موجب الا ... $= ٤$

او $س > ٤$ لان الكمية ذات الحدين $س - ٤$ تكون موجبة وحيث

ان الكمية ذات الحدود الثلاثة $س^2 - \frac{١}{١٣} س - \frac{١٨}{١٣}$ موجبة

بالنسبة لسائر مقادير المتغير $س$ التي تزيد عن $١ + \frac{١٨}{١٣}$ ...

[illegible] ية من ابتداء المشتقة ذات الرتبة م – ١ الى المشتقة ذات الرتبة

[illegible] ثابتة بعد ث

$$د^{م}(ع+ع') = د^{م}(ع) + د^{م+١}(ع)\, ع' + د^{م+٢}(ع) \frac{ع'^{٢}}{١\times٢} + \cdots$$

وحينئذ اذا كانت الدلالات $د^{م}(ع)$ و $د^{م+١}(ع)$ و $د^{م+٢}(ع)$ ... $د^{م}(ع+ع')$

كلها موجبة كانت $ع'$ كمية موجبة ايضا وبناء على ذلك تكون $(ع)$ $(ع+ع')$ كمية موجبة

بند ٢٢٩ ومتى كانت جذور المعادلة المفروضة كلها حقيقية أمكن بواسطة الطريقة السابقة تحصيل أقرب نهاية أى تحصيل العدد الصحيح الذى يزيد عن اكبر جذر لانه لما كانت جميع الجذور حقيقية كانت جميع جذور المعادلة المحتوية على المتغير ص حقيقية ايضا ولكيلا يكون لهذه المعادلة جذر موجب يلزم أن تكون جميع جذورها موجبة وحينئذ اذا كان لا يعتبر فى التجاريب غير الاعداد الصحيحة فانه يلزم دائما تعيين أصغر عدد صحيح تكون به مقادير الطرف الأول من المعادلة هى ومشتقاتها موجبة

بند ٢٣٠ ولتحصيل نهاية صغرى للجذور الموجبة يوضع $\frac{١}{ص}$ بدل س فاذا فرض أن ل هى النهاية الكبرى لجذور المعادلة بالنسبة للمتغير ص فمن البديهى أن $\frac{١}{ل}$ هى أصغر نهاية للجذور المعادلة بالنسبة الى س

ة فان اخذ س في الزيادة بالابتداء من الصفر فان مقدار الكمية
ة المحدود ولا يزال آخذًا في الزيادة ولا تتغير علامته الا مرة
. ة كما تقدم (في بند ٣٣٢) وحينئذ يرى أن المقدار المذكور
ب بالنسبة الى $س = ٤$ وحيث انه يرى أن الكمية ذات الحدين
$\frac{٧}{٢}$ موجبة ايضًا بالنسبة الى $س = ٤$ فيكون العدد
اية كبرى للجذور الموجبة

جعل $س = ٣$ في الكمية الكثيرة الحدود $س^٤ + ٢ س^٣ - ٦٠ س - ٤٨$
من ذلك ناتج سالب وبناءً على ذلك تكون هذه الكمية الكثيرة
د سالبة ايضًا بالنسبة الى كل مقدار يفرض للمتغير س بشرط
ن هذا المقدار أصغر من ٣ وحيث أن $س - \frac{٧}{٢}$ سالب
النسبة الى $س = ٣$ والى كل مقدار يفرض لهذا المتغير
ان يكون أصغر من ٣ فيكون العدد ٣ نهاية صغرى للجذور
ة للمعادلة

بنت ايضًا المعادلة

$$س^٧ - ٢ س^٦ - ٥ س^٥ + ١٠٫٢ س^٤ - س^٣ - ٨ س^٢ + ٥٠ س + ٦٠ = ٠$$

ل النهاية الصغرى للجذور الموجبة لهذه المعادلة توضع

$(س - \frac{٥}{٣})^٢ + \frac{٥٠٠}{٩}$ موجبة بالنسبة لسائر المقادير الحقيقية المفروضة للمتغير س فيكون العدد ٤ نهاية كبرى للجذور الموجبة وتكون هذه النهاية بمقتضى القاعدة المتقدمة (في سـ ٢٥٦) مبينة بالعدد ١٠١

ولنفرض ايضاً المعادلة

$$٢س^٦ - ٧س^٥ + س^٤ + ٢س^٣ - ٦٠س - ٤٨ = ٠$$

التي يمكن وضعها بالصورة

$$٢س^٥(س - \frac{٧}{٢}) + س^٤ + ٢س^٣ - ٦٠س - ٤٨ = ٠$$

فيشاهد أن الكمية ذات الحدين $س - \frac{٧}{٢}$ تكون موجبة بالنسبة لكل مقدار يفرض للمتغير س بشرط ان يكون هذا المقدار اكبر من $\frac{٧}{٢}$ ويشاهد أيضاً بمقتضى القاعدة المتقدمة في (سـ ٢٥٧) أن الكمية الكثيرة الحدود $س^٤ + ٢س^٣ - ٦٠س - ٤٨$ تكون موجبة بالنسبة الى $س = ١ + \sqrt[٣]{٦٠}$ والى كل مقدار اكبر من هذا المقدار وحيث أن $١ + \sqrt[٣]{٦٠}$ محصور بين ٤ و ٥ فيكون العدد ٥ هو النهاية الكبرى للجذور الموجبة للمعادلة

ويمكن في هذا المثال تحصيل نهاية أصغر من النهاية ٥ لانه لما كان لا يوجد في الكمية الكثيرة الحدود $س^٤ + ٢س^٣ - ٦٠س - ٤٨$ الا تغيرة واحدة

مقدمة

[illegible]

[illegible]

ويمكن أن يكون ... مختلفا عن واحد

ثم يمكن أن تكون جذور المعادلة أعدادا صحيحة أو كسورا ونبحث

الآن عن الجذور الصحيحة فنفرض لمزيد الايضاح المعادلة الآتية

من الدرجة الرابعة

$$م س^{٤} + ب_{١} س^{٣} + هـ_{١} س^{٢} + ج_{١} س + ف = ٠$$

فاذا جعل حـ كناية عن جذر صحيح لهذه المعادلة فانه يحدث

$$م حـ^{٤} + ب_{١} حـ^{٣} + هـ_{١} حـ^{٢} + ج_{١} حـ + ف = ٠$$

ومن هنا يؤخذ

$$\frac{ف}{حـ} = - م حـ^{٣} - ب_{١} حـ^{٢} - هـ_{١} حـ - ج_{١}$$

وحيث أن الطرف الأول من هذه المتساوية عدد صحيح فيلزم أن حـ

يقسم ف قسمة بلا باقي

وبجعل $\frac{ف}{حـ} = فَ$ ينتج من المتساوية السابقة

$$\frac{فَ + ج_{١}}{حـ} = - م حـ^{٢} - ب_{١} حـ - هـ_{١}$$

بالصورة

$$٦٠ + ٥٠\,\text{س} - ٨\,\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س}^{٣} + \text{س}^{٤}(١٢٠ - ٥\,\text{س} - ٢\,\text{س}^{٢}) + \text{س}^{٧} + \text{س}^{٨} = ٠$$

ومن المحقق بمقتضى البراهين المتقدمة (في بندي ٢٣٢ و ٢٥٥) انه اذا كانت الكمية الكثيرة الحدود المرتبة بحسب الدرجات التصاعدية للحرف س مركبة من حد واحد أو من عدة حدود موجبة متبوعة بحدود كلها سالبة فانها ان كانت موجبة بالنسبة لأى مقدار رقمي يفرض للمتغير س كانت موجبة كذلك بالنسبة لأى مقدار رقمي اصغر منه

وحيث أن الكميتين الكثيرتي الحدود $٦٠ + ٥٠\,\text{س} - ٨\,\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س}^{٣}$ و $١٢٠ - ٥\,\text{س} - ٢\,\text{س}^{٢}$ موجبتان بالنسبة الى $\text{س} = ٤$ فيكون العدد ٤ نهاية صغرى للجذور الموجبة للمعادلة

فاذا وضعت المعادلة بالمثابة

$$\text{س}^{٥}(\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} - ٥) + \text{س}^{٢}(١٢٠\,\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} - ٨) + ٥٠\,\text{س} + ٦٠ =$$

شوهد أن العدد ٢ نهاية كبرى للجذور الموجبة وبناء على ذلك لا يكون للمعادلة جذر موجب وحيث أنه يوجد بها أربع مغايرات فيكون لها بالأقل أربعة جذور تخيلية

ثم كان خارج قسمة المجموع على ح عدداً صحيحاً وهلم جرا

وبالجملة اذا توالى العمل الى أن تحصل خارج القسمة الذى مرتبته (م-١) (في معادلة درجتها م) وأضيف الى هذا الخارج مكرر الحد المحتوى على $س^{م-١}$ وقسم المجموع على ح تحصل من ذلك خارج قسمة يكون مساويا لمكرر الحد الأول مأخوذا بعلامة مخالفة لعلامته

فان كانت المعادلة غير تامة أجريت عليها عملية المعادلة التامة وذلك بأن يجعل الصفر مكررا لكل من قوى المتغير س الناقصة من هذه المعادلة

سند ولتحصيل الجذور الصحيحة لمعادلة بواسطة الشروط المذكورة ٢٦٤ تجرى عملية الحساب كما في المثال

$س^٥ + ٥ س^٤ + س^٣ - ١٦ س^٢ - ٢٠ س - ١٦ = ٠$

المبين في هذا الجدول

وحينئذٍ يعلم من هنا أن ح يقسم أيضاً $ح_1 + فَ$ قسمة بلا باقٍ

وإذا جعل $\frac{فَ + ح_1}{ح} = هَ$ حدث

$$\frac{هَ + ه_1}{ح} = -ه_1 ح - ك_1$$

ومن هنا يؤخذ أن ح يقسم أيضاً $هَ + ه_1$ قسمة بلا باقٍ فإذا

جعل $\frac{هَ + ه_1}{ح} = ه''$ حدث

$$\frac{ه'' + ك_1}{ح} = -ح_1$$

فإذا تحقق هذا الشرط الأخير كان ح هو جذر المعادلة

المفروضة إذ بمقتضى هذا الشرط تكون $\frac{ه'' + ك_1}{ح} + ح_1 = 0$

وحينئذٍ تكون الكمية $\frac{-ح''_1 + ك_1}{ح} + ح_1$

للمقدمة هي الناتج المتحصل من وضع ح بدل س

في الطرف الأول من المعادلة بعد قسمتها على $س^4$ وعلى ذلك

يلزم لكي تكون كمية صحيحة كالكمية ح جذراً للمعادلة

أولاً أن هذه الكمية تكون قاسمة للحد الأخير

وثانياً أنه إذا أضيف الخارج قسمة الحد الأخير على ح مكرر

الحد المحتوي على س كان خارج قسمة المجموع على ح عدداً صحيحاً

وثالثاً أنه إذا أضيف إلى هذا الخارج الأخير مكرر الحد المحتوي على

الذى هو -٥

وتحصل حدود الصف الرابع بواسطة قسمة كل حد من الصف السابق عليه على حد الصف الأول المتقدم اذا كانت القسمة صحيحة بلا باق .

وتكون باقى الصفوف بهذه المثابة

وحينئذ تكون الجذور الصحيحة هى $+٢ ، -٢ ، -٤$

فاذا قسم الطرف الأول من المعادلة على حاصل ضرب المضاريب $س - ٢$ و $س + ٢$ و $س + ٤$ تحصل خارج القسمة $س^٢ + س + ١$

وحينئذ يحدث الجذران الآخران من حل المعادلة $س^٢ + س + ١ =$

ويحذف عادة من الجدول السابق القاسمان $+١$ و -١ لانه يسهل استخراجهما من المعادلة مباشرة ويمكن ايضا فى مبداء الامر تعيين نهايتى الجذور بحيث لا تجرب الا القواسم المحصورة بين هاتين النهايتين ويؤخذ من المثال السابق ان نهاية الجذور الموجبة المحسوبة بواسطة القاعدة المتقدمة (فى بند ٥٢) هى $١ + \sqrt[٣]{٢٠}$ وهى عدد اقل من ٤ فاذا وضع فى المعادلة $- س$ بدل $س$ شوهد أن -٥ هو نهاية الجذور السالبة وحينئذ

+١٦ ، +٨ ، +٤ ، +٢ ، [illegible] ، −١ ، −٢ ، −٤ ، −٨ ، −١٦ .

−١ ، −٢ ، −٤ ، −٨ ، −١٦ ، [illegible] ، +٤ ، +٦ ، ١٦

−٢١ ، −٢٢ ، −٢٣ ، [illegible] ، −١٩ ، −١٨ ، −١٩

−٦ ، −١٤ ، −٣٦ ، −١٣ ، +١ ، +٢٤

−٢٢ ، −٣٠ ، −٢٠ ، −١٤ ، −١٠ ، −١٤

−١٥ ، −٢٥ ، [illegible] ، −١٤ ، +٥ ، +٣

−١٤ ، −٥١ ، [illegible] ، −١٣ ، +٦ ، +٤

−٧ ، −٥١ ، −١٣ ، −٣٠ ، −١

−٢ ، −٤٦ ، −٨ ، +٢ ، +٤

−١ ، −٤٦ ، +٨ ، −١٠ ، −١

أعني أنه يلزم أن نكتب في صف واحد سائر قواسم الحد الأخير
إما بعلامة + أو بعلامة − ونوضع مرتبة بحسب قيمتها
ثم نكتب تحتها في صف آخر خوارج القسمة المتحصلة من قسمة الحد
الأخير −١٦ على كل من هذه القواسم
ويتكون الصف الثالث بهذه المثابة وهي أن يضاف لكل من
الخوارج الموجودة في الصف السابق عليه مكرر الحد المحتوي على س

الذي

ـ٦ س + ٣ وحيث ان الخارج سالب ومكرر الحد الأول من المعادلة مأخوذاً بعلامة مخالفة ... فيكون ـ ٣ هو أحد الجذور المطلوبة

وحيث كان الخارج قسمة ٢ س^٣ ـ ٥ س + ١٠٥ على س ـ ٣ هو ٢ س^٢ + ٦ س ـ ٣٥ يحصل الجذران الآخران بواسطة حل المعادلة ٢ س^٢ + ٦ س ـ ٣٥ = ٠ وهذان الجذران غير منطقيين

٦٦ تنبيه وحيث انه يمكن ان جذور المعادلة المفروضة تكون متساوية بعد قسمتها على حاصل ضرب المضاريب المطابقة للجذور الصحيحة المتحصلة يلزم أن تجرى العملية على المعادلة الناتجة منها كما اجريت عليها بشرط ان لا تستعمل غير الجذور المتحصلة ثم يتوالى العمل بهذه الكيفية الى ان تحصل معادلة لا تكون مشتملة على واحد من الجذور الصحيحة للمعادلة المفروضة وحينئذ تعلم الجذور المكررة وعدد مرات تكرار كل واحد منها

٦٧ تنبيه اذا فرض ... ان الجذر للمعادلة

ح. س^م + ح~١~ س^(م‑١) + ح~٢~ س^(م‑٢) + ... + ح~م‑١~ س + ح~م~ = ٠

وكانت المكررات ح. ح~١~ ح~٢~ ... ح~م~ اعداداً صحيحة فان وضع في هذه

لا تجرب غير الأعداد +٧، +١، −١، −٣، و−٤

بند ٢٦٥ فإذا فرضت أيضًا المعادلة

$$٢س^{٣} - ٣٥س + ١٠٥ = ٠$$

فلا يكون العددان +١ و−١ جذرين لها وتكون النهايات هما $+١ + \sqrt{\frac{٣٥}{٢}}$ و $-\left(١ + \sqrt{\frac{١٠٥}{٢}}\right)$ وتكون قواسم العدد ١٠٥ المحصورة بين هاتين النهايتين هى ٣، ٥، −٣، −٥، −٧ وهذه القواسم تستلزم إجراء العمليات الآتية وهى

+٥، +٣، −٣، −٥، −٧

+٢١، +٣٥، −٣٥، −٢١، −١٥

−٣٢، −١٨، −٨٨، −٧٤، −٦٨

٠ −٦ . . .

−٢ . . .

فيشاهد بعد تحصيل الصف الثالث انه لا يراد من توالى هذه العمليات التجربية الا تحصيل القاسم +٣ وينبغى أن يضاف الى خارج القسمة −٦ مكرر الحد المحتوى على المتغير سٓ وحيث أن هذا الحد ناقص فيكون مكرره مساويًا للصفر وحينئذ يلزم ان نقسم

…ونة التي مكرر حدها الأول هو الواحد ومكررات حدودها الأخرى
اعداد صحيحة

بند ٢٦٨ وحيث أن الكسر $\frac{ح}{ء}$ من جذور المعادلة فيكون الطرف الأول
قابلاً للقسمة على $س - \frac{ح}{ء}$ ويكون الخارج (كما في بند ٢٣٧) هو

$$ج_0 س^{م-1} + \left(ج_0 \frac{ح}{ء} + ج_1\right) س^{م-2} + \left(ج_0 \frac{ح^2}{ء^2} + ج_1 \frac{ح}{ء} + ج_2\right) س^{م-3} \cdots + ج_0 \frac{ح^{م-1}}{ء^{م-1}} + ج_1 \frac{ح^{م-2}}{ء^{م-2}} + \cdots + ج_{م-1}$$

فاذا رمز الى هذا الخارج بالرمز خ والى الطرف الأول من المعادلة
بالرمز ه فانه يحدث

$$ه = \left(س - \frac{ح}{ء}\right) خ \quad أو \quad ه = (ءس - ح) \frac{خ}{ء}$$

و ه هي كمية كثيرة الحدود تامة فاذا كان $\frac{خ}{ء}$ محتوياً على مقامات
كسرية فبسبب ان هذه المقامات اولية مع $ءس - ح$ لا يمكن ان
يكون حاصل الضرب $(ءس - ح) \frac{خ}{ء}$ كمية كثيرة الحدود تامة
(كما في بند) فاذاً يلزم أن يكون الكسر $\frac{خ}{ء}$ كمية كثيرة الحدود
تامة واذاً تكون خ كمية كثيرة الحدود تامة أيضاً

المعادلة $\frac{ح}{ء}$ بدل س تحصل

$$ج_٠ \frac{ح^م}{ء^م} + ج_١ \frac{ح^{م-١}}{ء^{م-١}} + ج_٢ \frac{ح^{م-٢}}{ء^{م-٢}} + \dots + ج_{م-١} \frac{ح}{ء} + ج_م = ٠$$

وبضرب هذه المعادلة الكثيرة الحدود في $ء^م$ يحدث

$$ج_٠ ح^م + ج_١ ح^{م-١} ء + ج_٢ ح^{م-٢} ء^٢ + \dots + ج_{م-١} ح ء^{م-١} + ج_م ء^م = ٠$$

ومن هذه المتساوية يؤخذ أن خارجي قسمة $ج_٠ ح^م$ على ء و $ج_م ء^م$ على ح يكونان عددين صحيحين وحيث ان العددين ح و ء أوليان معًا فيكون العدد ء قاسمًا للمكرر $ج_٠$ والعدد ح قاسمًا للمكرر $ج_م$

وهذه النظرية يستنبط منها ان الجذور المنطقة تصير كلها اعدادًا صحيحة اذا ضربت جميع الجذور في العدد $ج_٠$ الذي هو مكرر الحد الأول اذ بهذه المثابة يؤول البحث عن الجذور الكسرية الى البحث عن الجذور الصحيحة لكنه يمكن ايضًا تحصيل الجذور الكسرية بواسطة اجراء العملية على المعادلة مباشرة

ويؤخذ أيضًا من هذه النظرية انه اذا كان مكرر الحد الأول هو الواحد فلا تكون الجذور المنطقة الا اعدادًا صحيحة ويشاهد ايضًا انه اذا ضربت جميع الجذور في $ج_٠$ حدثت من ذلك المعادلة

المجهولة

$\frac{ح}{د}$ من جذور المعادلة كان الناتج الحادث من وضع +١ بدل س
في الكمية س قابلاً للقسمة على د−ح والناتج الحادث من وضع
−١ بدل س في الكمية المذكورة قابلاً للقسمة على د+ح ثم
يبحث بين الكسور المتكونة بالمثابة المتقدمة عن الكسور المحققة
للشرطين المذكورين ويقطع النظر عما عداها

ولتعيين الجذور الصحيحة يلزم ان يفرض ان د=١ وحينئذ اذا
كان ح واحداً من هذه الجذور كان ح−١ قاسماً للناتج الحادث
من وضع +١ بدل س و ح+١ قاسماً للناتج الحادث من وضع
−١ بدل س

ولنمثل لذلك بالمعادلتين

$$٦ س^٦ − ١٩ س^٥ + ١٣ س^٤ + ٢٠ س^٣ + ٤٨ س^٢ − ١٦ = ٠$$

$$و \quad ١٥ س^٤ + ١٦ س^٣ − ٤٦ س^٢ − ٥ س + ٦ = ٠$$

فاما المعادلة الاولى فيكون ٢ واحداً من جذورها الحقيقية مكرراً
مرتين ويكون جذراها الآخران $\frac{٢}{٣}$ و $-\frac{١}{٢}$ واما باقي الجذور
فتكون تخيلية واما المعادلة الثانية فيكون جذراها الحقيقيان
$\frac{٢}{٣}$ و $-\frac{٣}{٥}$ ويكون جذراها الآخران غير منطقين

بند ٢٦٩ فاذا فرض الآن انه قد تكونت سائر الكسور الموجبة والسالبة التي تكون بسوطها قواسم الحد الأخير ومقاماتها قواسم مكرر الحد الأول وكان جـ/د واحدا من هذه الكسور فلكي يعلم هل هذا الكسر من جذور المعادلة م س = ٠ ام لا يضرب العدد جـ الذي هو مكرر الحد الأول في جـ/د ثم يضاف الى حاصل الضرب العدد ا الذي هو مكرر الحد س^{م-١} ويضرب المجموع في جـ/د ويضاف الى الحاصل العدد جـ الذي هو مكرر الحد س^{م-٢} وهلم جرا وحينئذ يلزم ان تكون جميع النواتج المتحصلة اعدادا صحيحة ويكون الناتج الأخير مساويا للصفر

فاذا تحصل جذر كالجذر جـ/د علم مباشرة خارج قسمة الطرف الأول من المعادلة على س - جـ/د وبقسمة هذا الخارج على د يتحصل خارج قسمة الكمية الكثيرة الحدود م على د س - جـ ويجعل هذا الخارج الأخير مساويا للصفر تتحصل معادلة دون المعادلة المفروضة في الدرجة منها تحصر الجذور الأُخر

بند ٢٧٠ وحيث أن خارج قسمة م على د س - جـ كمية كثيرة الحدود تامة فينتج من ذلك بفرض س = ١ او س = -١ انه اذا كانت

جـ

وبوضع س + ص بدل س يحصل

$$\text{د}(\text{س}+\text{ص}) = (\text{ص}+\text{س}-\text{ح})(\text{ص}+\text{س}-\text{ء})(\text{ص}+\text{س}-\text{ه})\cdots(\text{ص}+\text{س}-\text{ك})$$

ويمكن اعتبار الطرف الثاني من هذه المساواة كحاصل ضرب مركب من مضاريب كميات ذات حدين عددها م وحدها الاول ص وحدودها الثانية س-ح و س-ء و س-ه الخ وبناء على ذلك يكون مكرر أول قوة للتغير ص في هذا الحاصل مساويا لمجموع حواصل ضرب الكميات س-ح و س-ء و س-ه الخ بحيث يكون عدد مضاريب كل حاصل مساويا م-١ وحينئذ يكفي لتكوين هذه الحواصل أن تقسم بالتوالي الدلالة د(س) على كل من المضاريب س-ح و س-ء و س-ه الخ فيحدث

$$\text{د}'(\text{س}) = \frac{\text{د}(\text{س})}{\text{س}-\text{ح}} + \frac{\text{د}(\text{س})}{\text{س}-\text{ء}} + \frac{\text{د}(\text{س})}{\text{س}-\text{ه}} + \cdots + \frac{\text{د}(\text{س})}{\text{س}-\text{ك}}$$

فاذا فرض الآن أن

$$\text{د}(\text{س}) = (\text{س}-\text{ح})^{\text{م}}(\text{س}-\text{ء})^{\text{ن}}(\text{س}-\text{ه})^{\text{ل}} \text{ الخ}$$

فانه يلزم في مجموع خوارج قسمة الدلالة د(س) على كل من مضاريبها ان خارج قسمة د(س) على س-ح يتكرر مرارا

في طريقة الجذور المتساوية

١٧٦ — حيث أن الطرق التي يلزم استعمالها في تقدير الجذور غير المنطقة تقتضي كما سيأتي أنه لا يكون للمعادلة جذور متساوية فمن الضروري اختبار الحالة التي يتحقق بها هذا الشرط والكيفية التي يمكن بها تحويل المعادلة المفروضة الى معادلات أخرى لا يدخل كل جذر في الواحدة منها الا مرة واحدة عند عدم تحقق هذا الشرط

١٧٧ — مثلاً اذا فرضت المعادلة

$$س^{م} + ح_{١} س^{م-١} + ب_{٢} س^{م-٢} + \dots + ب_{١} س + ك = ٠$$

ورمز للاختصار بالرمز د(س) الى الطرف الاول من هذه المعادلة وبالرمز د'(س) لمشتقتها وهي

$$م س^{م-١} + (م-١) ح_{١} س^{م-٢} + (م-٢) ب_{٢} س^{م-٣} + \dots + ب_{١}$$

فتكون المشتقة د'(س) معامل الأول قوة للمتغير ص في الناتج المتحصل من وضع س+ص بدل س في الكمية الكثيرة الحدود د(س) لانه اذا رمز لجذور المعادلة بالرموز ح و ء ه ... ك حدث

$$د(س) = (س-ح)(س-ء)(س-ه)\dots(س-ك)$$

ولهذا

[illegible]

عدداً كانت جذور المعادلة غير متساوية وان كان محققاً لشى متغير
س بدرجة اولى فانه يكون دالاً على وجود جذرين متساويين
من جذور المعادلة وتكون باقى جذورها غير متساوية وان كانت

عددها م وخارج قسمة د(س) على س ـ ى بتكرر مراراً عددها ع وخارج قسمة د(س) على س ـ هـ بتكرر مراراً عددها ك و نخ وحينئذ يحصل

$$د'(س) = م (س - ح)^{م-1} (س - ى)^{ع} (س - هـ)^{ك} + نخ$$
$$+ ع (س - ح)^{م} (س - ى)^{ع-1} (س - هـ)^{ك} + نخ$$
$$+ ك (س - ح)^{م} (س - ى)^{ع} (س - هـ)^{ك-1} + نخ$$

وبالمقارنة بين مقداري كل من د(س) و د'(س) يعلم ان كل واحدة من هاتين الجملتين تقبل القسمة على حاصل الضرب

$$(س - ح)^{م-1} (س - ى)^{ع-1} (س - هـ)^{ك-1} نخ$$

وزيادة على ذلك يرى ان هذا الحاصل هو القاسم المشترك الأعظم بين الجملتين الكبرى في الحدود د(س) و د'(س) لانه ان لم يكن كذلك لزم ان يكون أحد مضاريب د(س) قاسماً ايضاً لخارج قسمة د(س) على الحاصل المذكور وحيث أن هذا الخارج هو

$$م (س - ى) (س - هـ) نخ + ع (س - ح) (س - هـ) نخ + ك (س - ح) (س - ى) نخ + نخ$$

وان كل واحد من المضاريب س ـ ح و س ـ ى و نخ يقسم جميع

وبات المذكورة على المتـاو

القاسم المشترك الأعظم المذكور به وجبة ثانية في ... أو ...
للمقدار يتحصل من ذلك معادلة يمكن أن يكون جذراها غير متساويين
أو متساويين فإن كانا غير متساويين دخل كل واحد منهما في المعادلة
د(س) = ٠ مرتين وإن كانا متساويين كان للمعادلة ثلاثة جذور
متساوية كل واحد منها مساوٍ للمقدار المتحصل للمتغير س

بند ٧٤ ولنوضح الطريقة التي يلزم سلوكها في العمل عند ما يكون
القاسم المشترك الأعظم بين د(س) و دَ(س) كمية كثيرة الحدود
درجتها أعلى من الدرجة الثانية فنقول

إذا جعل ب١ رمزاً لحاصل ضرب العوامل البسيطة الداخلة
في الكمية الكثيرة الحدود د(س) و ب٢ رمزاً لحاصل ضرب
القوى الأولى للمضاريب المتساوية مثنى و ب٣ رمزاً لحاصل
ضرب القوى الأولى للمضاريب المتساوية ثلاث و ب٤ رمزاً
لحاصل ضرب القوى الأولى للمضاريب المتساوية رباع وفرض
أنه لا يوجد مضاريب من الداخلة في المعادلة تزيد في الدرجة
عن ذلك فيحدث

$$د(س) = ب_1 \, ب_2^2 \, ب_3^3 \, ب_4^4$$

فإذا جعل

حيث أن هذه الحدود لا تحتوي على المتغير س الابدرجة ... وحينئذ يوجد ... ان المعادلة المفروضة لا تحتوي على مضاريب مرفوعة الى قوة تزيد عن القوة الثالثة

... اللازم للحصول على ...

... ك + ١٨ س + ١١ ... = ... − ١٢ ... − ...

... = ... − ... + ... + ...

... = س − ٢

فاذا قسمت كل واحدة من هذه المتساويات على المتساوية التالية لها فانه يحصل

... = ... − ٥ ... + ١٠ س + ٢٤ ...

... = ... − ٤ ... + س + ٦

٢٨٩

وباجراء هذه العمليات التي تعينها المضاريب ...

تحصل سائر جذور المعادلة د(س) = ٠ بواسطة حل كل

واحدة من المعادلات

ى = ٠ ، ى = ٠ ، ى = ٠ ، ى = ٠

التي تؤخذ من أولاها الجذور البسيطة للمعادلة المفروضة ومن

الثانية الجذور التي تدخل فيها مرتين ومن الثالثة الجذور التي

تدخل فيها ثلاث مرات ومن الرابعة الجذور التي تدخل فيها اربع مرات

فان كانت واحدة من الكميات الكثيرة الحدود ى ، ى ، ى ، ى

رقمية استنبط منها انه لا يكون للمعادلة جذور يكون عدد دخولها

فيها مساويا للمرتبة هذه الكمية الكثيرة الحدود

٢٧٥ بند ولاجراء هذه الطريقة نفرض المعادلة

س^٨ - ٧ س^٧ - ٢ س^٦ + ١١٨ س^٥ - ٥٩ س^٤ - ٤٠٨ س^٣ + ٢٦٤ س^٢ - ٨ س + ١٠٦

- ٤٣٢ = ٠

فنشاهد ان القاسم المشترك الأعظم بين طرفها الأول ومشتقته هو

[illegible]

... [illegible] تكون الحدود [illegible]

[illegible] $\frac{ل}{ق} = ب$ وإذًا تكون المعادلتان المطلوبتان

[illegible] $\frac{ل}{ق} = ٠ ، ق = ٠$

[illegible] اذا كانت قسمة الطرف الأول من المعادلة المعروضة

واذا قسمت المتساوية الاولى على الثانية والثانية على ص = س − ٢
حدث

ص = س + ٤ و ص = س^٢ − س − ٢

وحينئذ تكون المعادلات التي يراد حلها هي

س + ٤ = ٠ و س^٢ − س − ٢ = ٠ و س − ٢ = ٠

التي يحصل من اولاها الجذر −٤ الذي لا يدخل في المعادلة الا [illegible]
مرة واحدة ومن الثانية الجذران −١ و +٢ اللذان كل
واحد منهما يدخل في المعادلة مرتين ومن الثالثة الجذر ٢
الذي يدخل في المعادلة ثلاث مرات

فاذا فرضت ايضاً المعادلة

س^٩ + ٢س^٨ + س^٧ + ٦س^٦ + ٧س^٥ − ٢س^٤ + ٣س^٣ + ٢س^٢ − ١٤س − ٨ = ٠

واجريت عليها العملية السابقة فانه يحدث من ذلك المعادلة
المفروضة جذران غير متساويين وجذران كل واحد منهما
يدخل فيها مرتين وجذر يدخل فيها ثلاث مرات فاما الجذران
المتساويان فيها −٢ و +١ واما الجذران اللذان يدخلان
مرتين فيها (١ + √−٧) / ٢ و (١ − √−٧) / ٢ واما الجذر

الداخل

[illegible]

... تتساوى في ... المعادلات التي لا تزيد عن الدرجة
الخامسة

جذور ...

مثلاً اذا فرضت ...

$$س^4 - ٨ س^3 + ٢٤ س^2 - ٣٢ س + ١٦ = ٠$$

كانت مشتقة طرفها الأول هي

$$٤(س^3 - ٦ س^2 + ١٢ س - ٨)$$

فاذا قسمت هذه المعادلة: $س^4 - ٨ س^3 + ٢٤ س^2 - ٣٢ س + ١٦$

على $س^3 - ٦ س^2 + ١٢ س - ٨$ فان القسمة تكون صحيحة

ويكون الخارج

الاخرى جذور وكل واحد منها مساو للصفر بعد ما يكون للمعادلة المفروضة جذور وكل واحد منها مساو للجذر هـ ويلزم لأجل تنقيص جميع جذور المعادلة المفروضة بالجذر هـ ان يجعل ص = س − هـ فيكون س = ص + هـ وحينئذ تكون المعادلة المحولة مبينة بالصورة د(ص + هـ) = ٠ أو

$$د(هـ) + د'(هـ)ص + \frac{ص^2}{1\times2}د''(هـ) + \frac{ص^3}{1\times2\times3}د'''(هـ) + \cdots = 0$$

وحيث أن الدالة د(هـ) معدومة لكون هـ هو بالفرض من جذور المعادلة د(س) = ٠ فلا تتحقق المعادلة المحتوية على المتغير ص الا بجعل ص = ٠ واذا كان الجذر هـ مكررا مرارا عددها م في المعادلة المفروضة وكان للمعادلة المحتوية على المتغير ص جذور عددها م وكل واحد منها مساو للصفر فانه يلزم ان يكون طرفها الأول قابلا للقسمة على $ص^م$ وحينئذ ينبغي أن تكون مكررات سائر القوى المحتوية على المتغير ص الى القوة $ص^{م-1}$ معدومة وبناء على ذلك اذا وجد الجذر هـ داخلا في المعادلة مرارا عددها م فان سائر مشتقات طرفها الأول الى المشتقة التي رتبتها م − ١ تكون معدومة عندما يفرض

٢٧٩ ومتى علم جذر كالجذر ح لمعادلة امكن تعيين درجة تكرار هذا الجذر بواسطة وضعه فى المشتقات المتوالية للطرف الاول من هذه المعادلة لانه يؤخذ من النظرية المتقدمة (فى ٢٧٢) انه اذا كان الطرف الاول من المعادلة قابلاً للقسمة على (س – ح)^م^ كانت مشتقته الاولى قابلة للقسمة على (س – ح)^م-١^ ومشتقته الثانية قابلة للقسمة على (س – ح)^م-٢^ وهلم جرا ومشتقته ذات المرتبة م-١ قابلة للقسمة على س – ح ومشتقته التالية لها غير محتوية على المضروب س – ح وحينئذ فالجذر ح يجعل المشتقات المتوالية الى المشتقة م-١ للطرف الاول من المعادلة مساوية للصفر بشرط ان لا تؤول المشتقة التالية لهذه الاخيرة الى الصفر

٢٨٠ ويمكن التوصل الى النظرية كالمتقدمة (فى ٢٧٢) بواسطة طريقة مغايرة للطريقة التى سلكناها وهذه الطريقة هى التى تتعين بها الدلالات المشتقة بكيفية بسيطة

لانه اذا جعل ح رمزاً الواحد من جذور المعادلة د(س) = ٠ وتكونت من ذلك معادلة أخرى جذورها الانقص من جذور المعادلة المفروضة الا بالجذر ح كانت لهذه المعادلة

في الحصر ...

... البحث عن حدود الجذور ... مباحث

... المسألة التي تتعلق بتعيين نهايتين لكن بعد احداهما

اصغر ... منه والاخرى اكبر منه ... برهانات

... ... من بعضهما على وجه بحيث لا ينحصر بينهما

غير جذر واحد وهذا هو المعروف بحصر ... والثانية

الثانية ... التي تتعلق بالبحث عن مقدار كل جذر ... ...

... التقريب المضروبة

... وقد سبق البرهان على انه ... ...

الاول من معادلة بدل المتغير ...

في العلامة كانت ... بالاعلى ...

هاتين الكميتين وهذه نظرية ... على

كيفية استخراج الجذور

نظرية

اذا وضعنا بالتوالي في الطرف الاول من معادلة بدل المتغير

كميتين بينهما جذر حقيقي او عدد فردي من الجذور وتحصل من ذلك

هذه المعادلة أن $س = م$ واذا كان $م$ كناية عن جذر معادلة وانعدمت في فرض $س = م$ مشتقات الطرف الأول الى المشتقة التي رتبتها $ح - ١$ بدون أن تنعدم المشتقة التي رتبتها $ح$ دخل الجذر في المعادلة مرارًا عددها $ح$ لانه يكون للمعادلة التي جذورها لا تنقص عن جذور المعادلة المفروضة الا بالجذر $م$ جذور عددها $ح$ وكل واحد منها مساوٍ للصفر ومن هنا تؤخذ مباشرة النظرية المتقدمة (في بند ٢٧٤) لانه اذا كانت المشتقات الأول للدالة $د(س)$ التي عددها $ح-١$ تؤول الى الصفر عند جعل $س = م$ وكانت الأخرى غير معدومة كان للمعادلة $دَ(س) = ٠$ جذور عددها $ح - ١$ وكل واحد منها مساوٍ للجذر $م$ وبناء على ذلك تكون المشتقة $دَ(س)$ قابلة للقسمة على $(س - م)^{ح-١}$ وهذه الكمية الكثيرة الحدود لا تقبل القسمة على قوة اعلى من القوة $(س - م)^{ح}$ لانه يلزم لكي تكون المشتقة $دَ(س)$ قابلة للقسمة على $(س - م)^{ح}$ ان المشتقة النونية للدالة $د(س)$ تنعدم عند جعل $س = م$

د(ل) = (ل − ه)(ل − ق) .... (ل − ك) × ق (ل) و

د(م) = (م − [illegible])(م − [illegible]) .... (م − ك) × ق (م)

وحيث ان [illegible] .... محصورة بين الكميتين

ل و م [illegible] .... و ل − ك كلها

سالبة [illegible] ه و ه − ه − ق .... و م − ك كلها

موجبة [illegible] اشارة ضرب المضاريب ل − ه و ل − ق

و [illegible] مخالفة لاشارة حاصل ضرب المضاريب م − ه

و م − ق و [illegible] حاصلي الضربين يكونان مختلفين في العلامة

[illegible] يكون عدد هذه الجذور زوجيًا او فرديًا

فاذا كان [illegible] د(ل) و د(م) متحدين في العلامة

لزم [illegible] المعادلة د(س) = . جذر

يكون [illegible] وان لا تكون الجذور

[illegible] المعادلة د(س) = . هي وحدها

[illegible] المحصورة بين الكميتين ل و م وهذا مخالف للفرض

[illegible] اذا كان عدد الجذور ه و ق و ه .... و ك زوجيًا

كان الناتجان د(ل) و د(م) متحدين في العلامة وان كان

عددها فرديًا كان هذان الناتجان مختلفين في العلامة

ناتجان متخالفان في العلامة فاذا كان لا يوجد بين هاتين الكميتين جذر حقيقي أو كان يوجد بينهما عدد زوجي من الجذور فان الناتجين المذكورين يكونان متحدين في العلامة

ولنكن المعادلة المفروضة هي د(س) = ٠ ويجعل ل و ى رمزين لكميتين حقيقيتين ويفرض أن ل < ى . فان كان لا يوجد للمعادلة جذر يكون محصوراً بين الكميتين ل و ى المذكورتين كان الناتجان المتحصلان من وضع هاتين الكميتين بالتوالى بدل س متحدين في العلامة لانهما لو تخالفا في العلامة لوجد بين ل و ى جذر وهذا مخالف للفرض (بند ١٣٠)

ولنعتبر الآن الحالة التي يوجد فيها بين ل و ى جذور ونفرض أن هذه الجذور مبينة بالرموز ح و ء و م و .... و ك فتكون الكمية الكثيرة الحدود قابلة للقسمة على حاصل ضرب المضاريب :— س - ح و س - ء و .... و س - ك وحينئذ اذا رمز الى الخارج بالرمز خ(س) تحصل

د(س) = (س - ح) (س - ء) (س - م) ... (س - ك) × خ (س)

فاذا فرض بالتوالى في طرف هذه المتساوية أن س = ل و س = ى

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

من الاضطراب [illegible] ثم لنعتبر في [illegible]

من الآحاد في درجة المعادلة فإنه لا يوجد [illegible]

بين كل عددين متواليين تكونين ناتجتين متخالفتين في العلامة

ولا يوجد أو يوجد [illegible] بين كل عددين متواليين تكونان ناتجين

متحدين في العلامة [illegible] وكان الأمر [illegible] في ذلك لزاد

عدد الجذور عن درجة المعادلة وحينئذ فقد أمكن حصر

الجذور غير المنطقة المفروضة

ولنمثل لذلك بالمعادلة

ويستنبط مباشرة من النظرية السابقة هذه النظرية وهي انه
اذا انحصر بين كميتين موضوعتين في الطرف الأول من معادلة بدل
المتغير نائجتان مختلفتان في العلامة فانه لا يوجد بينهما غير جذر
واحد او ان عدد الجذور المحصورة بينهما يكون فرديًا فاذا انحصر
من هاتين الكميتين نائجتان متحدتان في العلامة فانه لا يوجد
بينهما جذر للمعادلة وان عدد الجذور المحصورة بينهما يكون
زوجيًا

تنبيه

الاثبات السابق لا يستلزم ان الجذور د و د و .... و لـه
تكون مختلفة عن بعضها بحيث اذا وجد بين الكميتين ل و ب
جذر يكون مكررًا في المعادلة مرارًا زوجية العدد ولم يكن بينهما غيره لزم
ان نعتبر ان عدد الجذور المحصورة بين هاتين الكميتين يكون زوجيًا
ويتضح اذا كان الحد الأخير من معادلة موجبا فلا يكون لهذه
المعادلة جذور موجبة أو ان عدد جذورها يكون زوجيًا
لانه اذا وضع بالتوالي بدل س صفر والنهاية الكبرى للجذور
الموجبة كان النائجان المتحصلان متحدين في العلامة فاذا كان
الحد الأخير

من [illegible] الاستبدال [illegible]

واذا اريد حصر الجذور [illegible] وحدها [illegible]

بدل المتغير الاعداد [illegible]

الموجبة ان عدد تغيرات [illegible]

المعادلة من الاستبدال [illegible]

مثلاً اذا فرض [illegible]

[illegible]

يقال ان هذه [illegible]

لانه لا [illegible]

+ ١٠ وان [illegible]

كان الناتج [illegible]

عملية الاستبدال الناتج [illegible]

للمعادلة جذرا [illegible]

بين ٢ ، ٣

واذا اريد حصر الجذور السالبة وحدها فانه يبدأ بوضع

– س بدل س في المعادلة المعروضة فتؤول الى

$$س^٤ - س^٣ - ١٠ س^٢ + س + ١٥ = ٠$$

التي تكون نهايات جذورها الموجبة والسالبة هي ٤ و −٣ بمقتضى الطريقة المتقدمة (في صحيفة ٥٨) فاذا وضعت على التوالي بدل المتغير في الطرف الاول من المعادلة جميع الاعداد الصحيحة المحصورة بين −٣ و +٤ شوهد أن علامات النواتج لا تختلف عن العلامات المبينة بالجدول الآتي وهو

س = −٣	= −٢	= −١	= ٠	= +١	= +٢	= +٣	= +٤
+	−	+	+	+	−	−	+

ومن هنا يؤخذ أن جميع جذور المعادلة حقيقية وأن اثنين منها موجبان واحدهما محصور بين ١ و ٢ والآخر بين ٣ و ٤ وأن الاثنين الآخرين سالبان واحدهما محصور بين −١ و −٢ والآخر بين −٢ و −٣

فان كانت درجة المعادلة م وعلم أن عدد جذورها التخيلية لا يزيد عن م − ٢ واجريت عملية حصر الجذور عند ما توضع بدل المتغير الاعداد الصحيحة المحصورة بين النهايتين حصل للنواتج للمعادلة

من

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

ان جذور المعادلة الجديدة لاتختلف بعضها عن بعض في النهاية
الا بواحد وحينئذ يمكن حصر هذه الجذور بهذه الكيفية

$س^٣ - ٣ س^٢ + ٣ س - ١ = ٠$

وحيث أن هذه المعادلة تحتوي على ثلاث مغايرات فيكون لها ثلاثة جذور موجبة وبمقتضى الطريقة المتقدمة (في ٢٨٥) يشاهد أن العدد ٣ هو النهاية الكبرى لهذه الجذور فاذا وضعت بدل المتغير الاعداد ٠ و ١ و ٢ شوهد انه يحصل من هذه الاعداد نواتج سالبة وحيث انه يحصل من العدد ٣ ...

فيؤخذ من ذلك انه يكون للمعادلة $س^٣ - ٣ س^٢ - س ...$ الاقل جذر سالب محصور بين ٠ و ٣ ...

الجذران الآخران حقيقيين أم تخيليين

٢٨٥ تنبيه اذا علم عدد الجذور الحقيقية فلا يلزم ... هذه الكيفية وهي ان توضع بدل المتغير اعداد متقاربة ... منها من بعض بحيث يكون للنواتج ... تغيير في الاشارات بقدر ما يكون للمعادلة من الجذور الحقيقية فان لم يكن ... الجذور الحقيقية ... فبذلك يحصل ... بين المقادير المعوضة ... بين كل مقدارين متعوضين متواليين

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] يطابق [illegible] أيضا

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

وهي انه لا يوضح بدقة المتغير غير الاعداد الصحيحة المتوالية المحصورة بين النهايتين

وهذه الطريقة المنسوبة للمهندس وارنغ قد مكثت مجهولة الى ان استكشفها المهندس لاجرانج قبل ان يقف على اشغال وارنغ المذكور وهي على غاية من الضبط الا انها تجتنب في الاعمال احياناً متى كانت المعادلة التي يراد حلها مرتفعة الدرجة وذلك لطول الحسابات التي يلزم اجراؤها لاجل تحصيل المعادلة التفاضلية ويمكن الآن الاستغناء عن هذه المعادلة بنظرية شهيرة استكشفها المهندس سطورم نتصدى لذكرها فنقول

نظرية المهندس سطورم واستعمالها في البحث عن الجذور الحقيقية

٢٨٦ — لنفرض أن ق = ٠ معادلة بأية درجة جميع جذورها غير متساوية ونجعل ق̇ رمزاً للدالة المشتقة من ق ثم نجري على ق و ق̇ عملية كعملية القاسم المشترك الأعظم بحيث لا تختلف عنها الا بتغيير علامات البواقي عند تنزيلها

منزلة

ق ، ق ، .... ق ، ق

بعددين موجبين أو بين كل عددين ل ، ى وكان ل

أصغر من ى كان عدد مغايرات علامات الدالات المذكورة

بالنسبة الى س = ى مساوياً في النهاية لعدد مغايرات

علامات تلك الدالات بالنسبة الى س = ل فاذ كان أصغر

منه كان الفرق بينهما مساوياً العدد الجذور الحقيقية المنسوبة

للمعادلة ق = ٠ والمحصورة بين ل ، ى

وللبرهنة على هذه النظرية يلزم اختبار الكيفية التي بها

يتغير عدد المغايرات المتكونة من علامات الدالات

ق ، ق ، ق ..... ق المعلومة الرتبة بالنسبة لاى مقدار

يفرض للمتغير س متى فرض لهذا المتغير جميع المقادير المتنوعة وحيث

ان لا يمكن حصول تغيير العلامات المفروضة عندما يأخذ س

في الازدياد الا بعد تغيير علامة واحدة من الدالات

ق ، ق ، ق ، ق وبناء على ذلك تكون هذه الدالة معدومة

فتستنبط من ذلك حالتان ينبغي اختبارهما وذلك بحسب ما تكون

الدالة المعدومة هي الدالة الاولى ق أو واحدة من الدالات

$$ق = ق_{١} خ - ق_{٢}$$
$$ق_{١} = ق_{٢} خ_{١} - ق_{٣}$$
$$ق_{٢} = ق_{٣} خ_{٢} - ق_{٤}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$ق_{م-١} = ق_{م} خ_{م} - ق_{م+١} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (١)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$ق_{ر-٢} \qquad ق_{ر-١} \qquad - ق_{ر}$$

(ويمكن في عمليات القسم المتوالية اجتنابا للكسور الكثيرة بضرب كل واحد من التقاسيم في المضروب الرقمي الموافق له لكنه ينبغي ان تكون المضاريب الداخلة في العملية موجبة حتى لا تتغير علامات البواقي)

اذا تقرر هذا فيلزم ان نلاحظ الدالات ق ، ق١ ، ق٢ ، ق٣ ...

فقد وصل المهندس ستورم الى النظرية الآتية وهي

نظرية

٣٨٧ اذا استعرض المتغير س في الدالات

ق ، ق١

يتبين انه لا يخفى من البت للكمية صغيرة و مقدار فيمكن جعل هذه الكمية صغيرة جدا بحيث يكون علامة تحليل المقدار د(هـ - و) ارتباط بعلامة حد ها الاول (كما في ٤٦٨ ٤ ٤) وحينئذ يكون المقدار د(هـ - و) متحدا في العلامة مع - و د'(هـ) وبناء على ذلك متخالفا في العلامة مع د'(هـ) وحيث ان المقدارين د'(هـ) و د(هـ - و) متحدان في العلامة فيكون المقداران د'(هـ - و) و د(هـ - و) متخالفين في العلامة واذا يكون المقداران ق و ق' متخالفين في العلامة بفرض س = هـ - و

فاذا وضع + و بدل - و في تحليل المقدار السابق يحدث

$$د(هـ+و) = د(هـ) + \frac{و}{١} د'(هـ) + \frac{و^٢}{١×٢} د''(هـ) + \frac{و^٣}{١×٢×٣} د'''(هـ) + الخ$$

وحينئذ يشاهد ايضا ان المقدار د(هـ + و) متحد في العلامة مع المقدار د'(هـ) وكذا مع المقدار د'(هـ + و) وبناء على ذلك يكون المقداران ق و ق' متحدين في العلامة بفرض

س = هـ + و

ومن هنا يؤخذ بفرض س = هـ انه اذا كان المقدار د'(س) او ق' مسبوقا بعلامة + كان المقدار ق مسبوقا بعلامة

ق , ق , ح لان الدلالة الاخيرة ق لاتكون معدومة

سبب أن ق تدل على عدد

الحالة الاولى

ولنختبر الآن التغيير الواقع في العلامات متى وصل المتغير س الآخذ في الازدياد بالتدريج الى مقدار به تصير الدلالة ق مساوية للصفر أو زاد عن هذا المقدار فان وضع هذا المقدار المفروض للمتغير س بعد بيانه بالرمز ح في الدلالة المشتقة ق فان هذه الدلالة تؤول الى عدد موجب أو سالب حيث ان المعادلة ق = ٠ ليس لها بالفرض جذور متساوية فاذا جعل و رمزا لكمية موجبة صغيرة بالكفاية بحيث لا يكون للمعادلة ق = ٠ جذر محصور بين ح − و , ح + و فلا تتغير علامة الدلالة ق متى جعل س = ح − و , س = ح و س = ح + و

اذا تقرر هذا ورمز للمقدار ق بالرمز د(س) وللمقدار ق بالرمز دَ(س) تحصل بملاحظة ان د(ح) = ٠

$$د(ح-و) = -\frac{و}{١}\,دَ(ح) + \frac{و^{٢}}{١\times٢}\,دً(ح) - \frac{و^{٣}}{١\times٢\times٣}\,دًّ(ح) + ح$$

وحيث

في فرض $س = حـ$ مع الدلالة ق

ولنتصدى لاختبار ما يترتب حصوله عندما تكون واحدة من هذه الدلالات معدومة فنقول ــــ

الحالة الثانية

اذا فرض أن $ق_ر$ هي الدلالة التي انعدمت من بين الدلالات في فرض $س = ء$ يقال أن هذا المقدار المفروض للمتغير س لا يمكن بواسطته جعل الدلالة $ق_{ر-١}$ السابقة على الدلالة $ق_ر$ مساوية للصفر وكذا لا يمكن بواسطته جعل الدلالة $ق_{ر+١}$ التالية لهذه الدلالة مساوية للصفر لانه لو تأتى حصول ذلك لانقسم المضروب $س - ء$ في أي واحد كان من الباقيين المتواليين $ق_{ر-١}$ و $ق_ر$ أو $ق_ر$ و $ق_{ر+١}$ وحينئذ يكون $س - ء$ مضروبا مكررا في الكمية الكبيرة للحدود ق وهذا محال لانه قد فرض ان المعادلة $ق = ٠$ لا تكون لها جذور متساوية

وبناء على ذلك تؤول الدلالتان $ق_{ر-١}$ و $ق_{ر+١}$ في فرض $س = ء$ الى عددين متخالفين في العلامة كما يتحقق ذلك بالتأمل في المعادلة

$$ق_{ر-١} = ق_ر لـه - ق_{ر+١}$$

بفرض س = ح - و ومسبوقاً بعلامة + بفرض س = ح + و

فان كان المقدار قَ مسبوقاً بعلامة - بفرض س = ح كان المقدار ق مسبوقاً بعلامة + بفرض س = ح - و ومسبوقاً بعلامة - بفرض س = ح + و كما يشاهد ذلك كله بالجدول الآتي وهو

	ق	قَ		ق	قَ
بفرض س = ح - و	-	+		+	-
س = ح	٠	+	أو	٠	-
س = ح + و	+	+		-	-

وبناءً على ذلك اذا كان ح جذراً للمعادلة ق = ٠ يكون من علامتي المقدارين ق , قَ مغايرة قبل أن يصل المتغير س الى المقدار ح وهذه المغايرة تكون مداومة بعد أن يتجاوز هذا المتغير عن المقدار ح المذكور

وأما الدلالات الاخرى قً , قٌ , الخ فان كل واحدة منها تكون كالدلالة قَ مسبوقة في فرض س = ح - و أو س = ح + و بالعلامة التي يلزم ان تكون مسبوقة بها في فرض س = ح اذا لم تنعدم واحدة ما من هذه الدلالات

في فرض

الدالات المتوالية [illegible] في [illegible] فرض $س \neq د$

غير متغايرة وحدة

وبناء على ذلك يمكن من الدالات جميع الدالات في … ن

فرض $س \neq د$ … متغايرات بقدر ما يكون عدد الدالات نفسه

الدالات متغايرات في فرض $س \neq د$ وحينئذ اذا كانت

واحدة من … الدالات [illegible] عدد المتغايرات

التي … بعلامات ما لم يكن المقدار محدوداً ثم تغيير س

يترتب عليه جعل هذه الدالة مساوية … صفراً في حالة

الدالة الاولى ف مساوية للصفر ايضاً لانه ينشأ في هذه

الحالة عن تغيير علامة هذه الدالة حذف واحدة من المتغايرات

عن يسار العلامات كما سبق اثبات ذلك في الحالة الاولى)

ومثل هذا يتأتى حصوله اذا انعدمت عدة دالات متوالية

غير متجاورة في فرض $س = د$

وحينئذ فقد ثبت انه كلما وصل المتغير س الآخذ في الازدياد

بكيفية غير محسوسة الى المقدار د وزاد عن هذا المقدار الذي

يصير الدالة ف مساوية للصفر ترتب على ذلك [illegible]

التي هي من المعادلات (١) المتقدمة (في ص ٢٨٦) لانه ينتج من هذه المعادلة أن

$ق_{ء-١} = - ق_{ء+١}$ عندما تكون $ق_{ء} = ٠$

اذا تقرر هذا ووضع بدل س عددان كالعددين ء-و و ء+و اللذين يختلفان عن ء اختلافاً يسيراً كان للدالتين $ق_{ء-١}$, $ق_{ء+١}$ بالنسبة لهذين المقدارين المفروضين للمتغير س عين العلامتين اللتين تكون لهما في فرض س = ء لانه يمكن جعل و صغيراً بالكفاية بحيث لا تتغير علامة كلتا الدالتين $ق_{ء-١}$, $ق_{ء+١}$ عندما يأخذ المتغير س في الزيادة من ء-و الى ء+و ومن هنا يؤخذ على أي وجه كانت علامة الدالة $ق_{ء}$ في فرض س = ء-و لكونها موضوعة بين علامتي $ق_{ء-١}$, $ق_{ء+١}$ المتخالفتين انه يتكون دائماً من علامات الدالات الثلاث المتوالية $ق_{ء-١}$ و $ق_{ء}$ و $ق_{ء+١}$ في فرض س = ء-و مداومة ومغايرة أو مغايرة ومداومة وبمثل ذلك يبرهن مهما كانت علامة الدالة $ق_{ء}$ في فرض س = ء+و على انه لا يتكون من علامات الدالات الثلاث

لا تتغير في هذه الحالة غير مغيرات علامات جميع الدالات وأما الدالة التي تنعدم فيقطع النظر عنها لانه قد سبق انه اذا انعدمت الدالة $ف_م$ ففرض $س = ل$ واستعوض المتغير $س$ بكمية تختلف عن $ل$ بيسير فانه يتكون دائماً من علامات الدالات $ف_{م-١}$ ، $ف_م$ ، $ف_{م+١}$ مغايرة ومداومة وهذه المغايرة لا تنعدم عند قطع النظر عن علامة الدالة $ف_م$

التنبيه الاول

يمكن بواسطة النظرية السابقة معرفة عدد الجذور الحقيقية لمعادلة وذلك بأن يؤخذ بدل العددين اللذين يوضعان بدل $س$ النهايتان الكبريان للجذور الموجبة والسالبة أو كميتان [illegible] أكبر منهما ويمكن ايضاً قطع النظر عن كل استبدال لانه يمكن دائماً ان يفرض للمتغير $س$ مقدار كبير بالكفاية بحيث تكون كل واحدة من الدالات $ف$ ، $ف_١$ ، ..... ، $ف_م$ متحدة في العلامة مع حدها الاول (كما في ٢٤٧) وبناءً على ذلك اذا لوحظت علامات الحدود الاولى من الدالات بفرض المتغير $س$ سالباً وعلامات هذه الحدود بفرض هذا المتغير موجباً كانت

الدلالات ق و ق و ق ... و ق انعدام المغايرة الحادثة

من علامتي الدلالتين ق و ق وهذه المغايرة تتبدل بمداومة

وأما تغيير علامات الدلالات المتوسطة ق و ق و ق و .... و ق

فلا يترتب عليه زيادة عدد المغايرات ولا تنقيصه وبناء على

ذلك اذا أُخِذَ عدد كالعدد ل موجب أو سالب وعدد آخر

أكبر منه كالعدد ء وفرض ان المتغير س لا يزال آخذا

في الزيادة من ل الى ء فبعدد ما يوجد لهذا المتغير

من المقادير المحصورة بين ل و ء التي تصير الدلالة

مساوية للصفر يكون من علامات الدلالات ق و ق و ق

.... و ق في فرض س = ء مغايرات عددها بالأقل

عدد المغايرات المتكونة من العلامات في فرض س = ل

وحينئذ فهذه القاعدة هي عين النظرية التي يراد شرحها

انما تختلف عنها في اللفظ فقط

تنبيه

يمكن ان تكون واحدة من الدلالات ق و ق و ق و .... و ق

معدومة إما في فرض س = ل أو في فرض س = ء وحينئذ

تكون من علامات هاتين الدلالتين مداومة عند فرض المتغير

، موجبًا تكون من هذه العلامات مغايرة عند فرض هذا

لتغير سالبًا وبالعكس

من هنا يؤخذ انه يلزم لكي تكون جميع جذور المعادلة ق = ٠

حقيقية ان تكون الحدود الاول من الدلالات ق، ق، ... ق

متحدة في العلامة

ولنطبق الآن نظرية المهندس استودرم على بعض امثلة فنقول ٤٨٨

المثال الاول

اذا فرضت المعادلة س٣ − ٧ س − ٥ = ٠ حدث

ق = س٣ − ٧ س − ٥

ق = ٣ س٢ − ٧

ويلزم لحساب الدلالة ق ان تقسم الدلالة ق على ق

ولتجنب الكسور نضرب الدلالة ق في ٣ فيتحصل من

ذلك الباقي −١٤ س − ١٥ وحينئذ يكون

ق = ١٤ س + ١٥

ويلزم لحساب الدلالة ق ان تقسم الدلالة ق على الدلالة

زيادة عدد مغايرات الجملة الاولى من العلامات عن عدد مغايرات الجملة الثانية منها هي عدد الجذور الحقيقية للمعادلة

النتيجة الثانية

الدلالات المساعدة ف و ف و ف ..... و ف عددها مساو في العادة للدرجة الميمية للمعادلة ف = ٠ لانه يشاهد من البحث عن القاسم المشترك الأعظم بين ف و ف ان كل باق ينقص درجته في العادة بواحد عن درجة الباقي السابق عليه وكلما كان عدد الدلالات ف و ف و ... مساويا للدرجة الميمية للمعادلة يمكن معرفة عدد الجذور التخيلية للمعادلة ف = ٠ وذلك بالنظر الى علامات الحدود الاول من هذه الدلالات حينئذ يكون للمعادلة ف = ٠ ازواج من الجذور التخيلية بعدد ما يوجد من المغايرات في جملة علامات الحدود الاول من الدلالات المساعدة ف و ف و ... الى الدلالة الثانية ف وهذه القاعدة يسهل اثباتها بواسطة النتيجة الاولى وذلك لانه يشاهد بمقتضى هذا الفرض ان احدى الدلالتين المتواليتين ... و ف زوجية الدرجة والاخرى فردية الدرجة بحيث

أتى س = ١ + $\sqrt{٥}$ (كما في ص ٥٥٩) فيكون الجذر محصوراً بين الصفر و ٤ ويؤخذ من الفرض س = ٢ ناتج سالب ومن الفرض س = ٣ ناتج موجب وحينئذ يكون الجذر محصوراً بين ٢ و ٣ وسيأتي انه يمكن بواسطة طرق بسيطة تحصيل مقدار يقرب من المقدار الحقيقي بقدر ما يراد

ولما كان لا يترتب على حساب الدلالات $ق_1$ و $ق_2$ و $ق_3$ صعوبة في العمل وجب الاعراض عن ايراد ذلك هنا مفصلاً

المثال الثاني

اذا فرضت المعادلة $س^3 - ٧س + ٧ = ٠$ حدث

$ق = س^3 - ٧س + ٧$ و

$ق_1 = ٣س^2 - ٧$ و

$ق_2 = ٢س - ٣$ و

$ق_3 = +١$

فاذا كان مقدار المتغير س سالباً تكونت من علامات الحدود الاولى من الدلالات ق و $ق_1$ و $ق_2$ و $ق_3$ جملة العلامات

− + − +

ولتجنب الكسور نضرب الدلالة $ق_١$ في ٤ كالباقي الذي $ق_٢$

بدرجة اولى فيكون الباقي غير المشتمل على س مساويًا +٣٤٣+٦

وحينئذ يكون

$$ق_٣ = -٣٤٣-٦$$

ومتى فرض للمتغير س مقدار سالب تكونت علامات الحدود

الاول للدلالات ف و $ق_١$ و $ق_٢$ و $ق_٣$ جملة العلامات

− + − − −

وهذه الحدود تكون من علاماتها عند ما يفرض للمتغير س

مقدار موجب جملة العلامات

− + + +

وحيث انه يتكون من الجملة الاولى من العلامات مغايرتان

ومن الجملة الثانية مغايرة واحدة فلا يكون للمعادلة غير جذر

حقيقي واحد (كما في النتيجة الاولى من بند ٢٨٧) وحينئذ يكون

هذا الجذر موجبًا لان الحد الأخير سالب (كما في بند ٢٦١) ويكفي

لتحصيل نهايتين للجذر ان توضع بدل المتغير في الدلالة ف

اعداد متنوعة وبناءً على ذلك اذا فرض ان س = ٠ كانت

هذه الدلالة سالبة وحيث انها تكون موجبة عند ما يفرض

ان

وجذران محصوران بين ١ و ١٠

واذا فرض أن س = ٢ تكونت من ذلك جملة العلامات

(٢) ...... + + + +

ويؤخذ من مقارنة هذه الجملة بالجملة المتكونة من فرض س = ١

ان الجذرين الموجبين يكونا محصورين بين ١ و ٢ فاذا فرض

أن س = ١,٥ كان للدلالة ق مقدار سالب وبناً على ذلك

يكون أحد الجذرين الموجبين محصوراً بين ١ و ١,٥ والآخر

بين ١,٥ و ٢

وأما الجذر السالب للمعادلة المفروضة فيحصل له نهايتان متغايرة

بقدر ما يراد وذلك بأن يوضع بدل المتغير في الدلالة ق وحدها

اعداد متنوعة فان كانت الاعداد التي توضع بدل المتغير صحيحة

كان الجذر محصوراً بين -٣ و -٤

واذا وضع المقدار س = ١,٥ في الدلالات الثلاث ق و ق١ و ر

انعدمت الدلالة الأخيرة وتكونت من ذلك جملة العلامات

(١,٥) .... - - ٠ +

فاذا قطع النظر في هذه الجملة عن علامة الصفر تكونت منها مغايرة

وان كان مقدار المتغير س موجبا تكونت ايضا من علامات هذه الحدود جملة العلامات

+ + + +

وحيث انه يتكون من جملة العلامات الاولى ثلاث مغايرات والثانية لا يتكون منها مغايرة تما فتكون جذور المعادلة الثلاثة حقيقية ولاجراء عملية استخراج الجذور يفرض بالتوالي أن $س = -١٠$ و -١ و ٠ و $+١$ و $+١٠$ فتكون علامات الدلالات ——— $ق$ و $ق_١$ و $ق_٢$ و $ق_٣$ بالنسبة الى هذه المقادير المفروضة للمتغير س هي المشاهدة في الجدول

س	ق	$ق_١$	$ق_٢$	$ق_٣$
(−١٠)	−	+	−	+
(−١)	+	−	−	+
(٠)	+	−	−	+
(١)	+	−	−	+
(١٠)	+	+	+	+

ومن هنا يعلم أن المعادلة المفروضة لها جذر محصور بين −١ و٠ و (٠ و ١)

	ق	ق	ق	ق	ق
[illegible]	[illegible]	−	+	[illegible]	−
[illegible]		−	−	−	−
[illegible]	−	−	−	[illegible]	−
[illegible]	+	+	+	−	[illegible]
[illegible]	−	−	[illegible]	+	
[illegible]	+	[illegible]	−	+	
[illegible]	−	−	+	−	−

فأما الصف الأول من هذا الجدول فهو مكون من إشارات التي
نأخذها الحدود الأولى من الدالات ق، ق ق ق ق ق
بالنسبة إلى مقدار سالب مفروض للمتغير س
وأما الصف الثاني فإنه يتكون من فرض س = ٠ وحيث أن عدد
المغايرات الموجودة في هذا الصف يساوي عدد المغايرات
الموجودة في الصف الأول يستنتج أن ليس للمعادلة المفروضة جذور
سالبة وبناءً على ذلك لا نضع بدل المتغير س في هذه المعادلة
أعدادا سالبة

واحدة وحينئذ ينقص عدد مغايرات هذه الجملة مغايرة واحدة عن عدد مغايرات الجملة المتكونة من فرض $س = ١$ ويزيد عدد هذه المغايرات واحدة عن عدد مغايرات الجملة المتكونة من فرض $س = ٠$ وهذا موافق للتنبيه المتقدم (في ص ٢٨٧)

المثال الثالث

اذا فرضت المعادلة $س^{٤} - ٤س^{٣} - ٣س + ٢٣ = ٠$ حدث

$ق = س^{٤} - ٤س^{٣} - ٣س + ٢٣$ ق

$ق_{١} = ٤س^{٣} - ١٢س^{٢} - ٣$ ق

$ق_{٢} = ١٢س^{٢} + ١٣٧١$ ق

$ق_{٣} = ٤٩١س + ١٣٧١$ ق .

$ق_{٤} = -٧١٥٧٩٣٢$

وهاك جدول العلامات التي تأخذها هذه المشتقات بالنسبة للمقادير المتنوعة المفروضة للمتغير س

(٣٤١)

الشرط الرابع

... في ايجاد شروط الازمة بحيث ... المعادلة

$س^{3} + ع س + ك = ٠$ كلها حقيقية ...

$ق = س^{3} + ع س + ك$

$ق_{1} = ٣ س^{2} + ع$

$ق_{2} = -٢ع س - ٣ك$

$ق_{3} = -٤ع^{3} - ٢٧ك^{2}$

وحينئذٍ يلزم لكي تكون الجذور الثلاثة للمعادلة المفروضة حقيقيـــة ان تكون الحدود الأول من الدالات ق ، ق١ ، ق٢ ، ق٣ بالنسـ لمقدار سالب مفروض للمتغير س مسبوقة بعلامات تتكو منها الامغايرات ومسبوقة بالنسبة لمقدار موجب مفروض للمتغير س بعلامات لاتتكون منها الامداومات فاذاً إذ كان مقدار المتغير س سالبًا كان الحد الأول من الدالـ ق مسبوقًا بالعلامة − والدالة ق١ مسبوقة بالعلا + وإذًا يلزم ان يكون الحد ٢ع س مسبوقًا بالعلامة وتكون الدالة ق٣ التي هي كمية ثابتة مسبوقة بالعلام

أما الصف الثالث والرابع فانهما يتكونان من فرض س = ١ او س = ١٠
وحينئذ يعلم بالتأمل في هذين الصفين ان المعادلة المفروضة
يكون لها جذران حقيقيان محصوران بين ١ و ١٠
وحيث أن جملة العلامات المتكونة من فرض س = ١٠ عين
الجملة المتكونة من علامات الحدود الاولى من الدلالات بفرض
مقدار موجب للمتغير س فلا توضع في المعادلة بدل هذا المتغير
أعداد تزيد من ١٠ وحينئذ يكون العدد ٥ هو النهاية
الكبرى للجذور الموجبة للمعادلة المفروضة
وبناء على ذلك يكون للمعادلة جذران حقيقيان وجذران
تخيليان فاذا كتبت ايضاً جملة العلامات المتكونة من فرض
س = ١ ثم كتبت جملتا العلامات المتكونتان من فرض
س = ٢ و س = ٣ شوهد أن أحد جذري المعادلة يكون
محصوراً بين ٢ و ٣ والآخر اكبر من ٣ وحينئذ يمكن
تحصيل نهايات قريبة من النهاية ٣ هذه وذلك
بالاقتصار على الدلالة ق

المثال الرابع

ق و ق و ق و ق ... ق وتحت علامات النوع

فيكون عدد الجذور الحقيقية ... للدالة ق = . المحصورة بين

ل و ى مساويًا للفرق ... بين به عدد مغايرات جملة

العلامات المتكونة من وضع العدد ل بدل المتغير س

عن عدد مغايرات جملة العلامات المتكونة من وضع العدد ى

بدل المتغير س

ويكفي لبيان هذه الخاصية ان ينبه على انه يمكن ان تطبق على

الجملة الجزئية للدالات ق و ق و ..... و ق البرهنة

التي تقدمت في الجملة الكلية للدالات ق و ق و ق و ... ق

و ق و ..... ق التي يرى أن الأخيرة منها دالة على عدد ثابت

والدالة ق لا تزال مسبوقة في هذا الغرض بعلامة

واحدة بدون ان يكون لها مقدار ثابت بالنسبة للمقادير

التصاعدية المفروضة للمتغير س من ابتدا ل الى ى

وحيث أن جملة علامات الدالات ق و ق و ق و .... و ق

تنعدم منها مغايرة كلما انعدمت الدالة ق وأن انعدام

الدالات المتوسطة بين ق و ق لا يترتب عليه زيادة

ومن هنا ينتج أن

ع ر > ه ٤ ح٣ + ٧، ك٤ ر

وهذان الشرطان كافيان فى العمل لانهما ان تحققا لم يحصل من علامات الحدود الأول للدلالات ف ر ف، ف، ف٣ بالنسبة لمقدار موجب مفروض للمتغير س غير مداومات

وبالجملة فانه يؤخذ من النتيجة الثالثة المتقدمة (فى ٢٨٧)

ان هذين الشرطين ضروريان وكافيان فى العمل

ومما ينبغى التنبيه عليه أن الشرط الأول داخل فى الثانى لان الحد ٧، ك٤ لما كان دائماً موجباً كانت الكمية ٤ ح٣ + ٧، ك٤ دائماً موجبة مالم يكن ٤ ح٣ كمية سالبة

٢٨٩ اذا كانت واحدة من الدلالات المساعدة كالدلالة ف المتوسطة بين ف و ف٢ مسبوقة دائماً بعلامة واحدة بالنسبة لسائر المقادير المفروضة للمتغير س التى تكون محصورة بين ل و ح فلا حاجة الى اعتبار الدلالات التالية لهذه الدلالة لانه يكفى لذلك ان يوضع العددان ل و ح بدل المتغير س فى الدلالات ذات الدرجة العظمى و هى

ع و ك و ر ... الخ الى ما هو محصور من هذه المقادير بين ل و ى
وفرضنا ان هذه الرموز مرتبة بحسب عظمها وابتدأنا بأصغرها
تحصل بواسطة القاعدة المتقدمة لمعادلة ق = ٠ عدد من
الجذور المحصورة بين ل و ع - و (ن و هي كمية صغيرة بقدر
ما يراد) بقدر ما يتحصل لها من الجذور المحصورة بين
ع + و و ك - و أعني بين ع و ك (بجعل و كناية عن
عدد صغير بالكناية) وبقدر ما يتحصل لها من الجذور
المحصورة بين ك و ر وهلم جرا ويفرض ثانياً أن المقادير
ع ك ر ... الخ التي يترتب عليها انعدام الدلالة ق لا يترتب
عليها في آنٍ واحدٍ انعدام الدلالة ق
ويمكن ان يلاحظ انه اذا كانت الدلالة ق لا تزال
مسبوقة بعلامة واحدة بالنسبة للمقادير الصاعدة
المفروضة للمتغير س من ل الى ى كان عدد المغايرات
واحداً دائماً عند ما يوضع بدل المتغير س العدد ل أو العدد
ى أو غيرهما من الأعداد المحصورة بين ل و ى في الجملة
الجزئية المتكونة من الدلالات ق ق ق ... ق لا تزال

عدد المغايرات ولانقصه فيكون للمعادلة ق = جذور محصورة بين ل و ى بقدر المغايرات التي تزيد بها جملة العلامات المتكونة من وضع العدد ى بدل المتغير س عن جملة العلامات المتكونة من وضع العدد ل بدل المتغير س وحيث ان النظرية السابقة قد صارت بسيطة كما هو شاهد هنا فلا صعوبة في استعمالها لاننا اذا بحثنا عن القاسم المشترك الأعظم بين ق و ق توصلنا الى كمية كثيرة الحدود كالكمية ق (ذات الدرجة الثانية مثلاً) التي لما كانت مساوية للصفر لم يحصل منها للمتغير س غير مقادير تخيلية وحينئذ لا حاجة الى توالي عمليات القسمة لان هذه الكمية الكثيرة الحدود ق لا تزال متحدة في العلامة مع حدها الأول بالنسبة لسائر المقادير الحقيقية المفروضة للمتغير س وبناء على ذلك يمكن أخذ تلك الكمية بدل الدلالة الأخيرة من الدلالات المساعدة ق، ق، الخ ويمكن ايضاً الاقتصار على كمية كثيرة الحدود كالكمية ق التي تنعدم بالنسبة لمقادير حقيقية تفرض للمتغير س بشرط انه لا يتعذر تعيين جميع هذه المقادير لاننا اذا رمزنا

بالرموز

ق و ق ... ق

فاذا قسمت الدلالات ق و ق و ق ... ق على ق

و رمز الى الخوارج بالرموز ط , ط , ... , ط فانه

يعلم بالسهولة ان النظرية المتقدمة (فرضية ٢٨٧) تنطبق على

المعادلة ط = . وذلك باعتبار الدلالات

ط , ط , ... , ط لانه يشاهد في بادئ الامر

أن الخارج الاخير ط لا يحتوي على المتغير س لانه مساو

للواحد وحيث انه يوجد دائماً بين الدلالات ق , ق , ق ونحو

المعادلات ق = ق ط - ق , ق = ق ط - ق ونحو

فيعرض رقم هذه الخوارج على ق

ط = ط ط - ط , ط = ط ط - ط ونحو ومن هنا يؤخذ

(ثاني فرضية ٢٨٧) انه اذا انعدمت بواسطة مقدار مفروض

للمتغير س واحدة من الدلالات ط , ط , ... , ط

فلا يمكن بواسطة هذا المقدار انعدام واحدة من الدلالات

المتجاورتين بل يكون لهما دائماً اشارتان متخالفتان في العلامة

اعني انه اذا كان ح ... المعادلة ط = . كانت الدلالتان

على انعدام الدلالات المتوسطة وقوع تغيير في عدد دعا ... ت هذه الجملة غير انه يلزم اذا كان عدد المتغيرات يزيد عن عدد ما يتعوض المتغير س في هذه الدلالات بالعددين ل ، ى ان الدلالة ق تكون مسبوقة بعلامة واحدة بالنسبة للقادير المتزايدة المفروضة للمتغير س بالابتداء من ل الى ى لان هذه القضية لا تتحقق الا في الحالة التي تكون فيها جذور المعادلة ق = ٠ حقيقية

(بند ٤٧١) وقد فرضنا الى هنا ان المعادلة المفروضة ق = ٠ ليس لها جذور متساوية غير ان النظرية المتقدمة (في بند ٤٨٧) لا تزال مستعملة وان لم يتحقق هذا الشرط

ولبيان ذلك نفرض انه يكون للمعادلة جذور متساوية وانا نجري على الكميتين ق ، ق عملية مشابهة للعملية المتقدمة (في بند ٤٨٦) فنتوصل الى باق كالباقي ق يكون دالة للمتغير س وينقسم الباقي السابق عليه ق (ر-١) قسمة بلا باق فاذا يكون الباقي ق هو القاسم المشترك الاعظم بين ق ، ق ، ق واذا يكون قابلا للقسمة بلا باق لكل من البواقي المتوالية

ق

لهذين ل ، ى التي … بالنسبة اليها خارج قسمة ق
… ايا الى الايجاب و عدد … المعادلة من الجذور المحصورة
ل و ى التي يتغير … خارج لنسبة المذكورة
لا يجاب الى السلب فانه … ساويا للفرق بين عدد
… رات المتحصلة من جملة علامات الدلالات ق ، ق َ ، ق ً …
… و ق في فرض س = ل وبين عدد مغايراتها في فرض
س = ى
حينئذ لا يمكن ان يكون عدد ما للمعادلة ق = ٠ من الجذور المحصورة
بين ل و ى أصغر من الفرق لكان بين عددى المغايرات
… وانما يمكن ان يكون مساويا له أو اكبر منه بعدد زوجي
… يكون مساويا له بالضبط ان تكون الدلالة ق َ مشتقة
الدلالة ق أو أن تكون دلالة متحدة في العلامة مع هذه
المشتقة او مخالفة معها في العلامة بالنسبة لكل مقدار حقيقي
… للمتغير س ويكون محصورا بين ل و ى وعليه يترتب
… عدام الدلالة ق وحيث ان مثل هذه الدلالة ليست معلومة
… مبدا الامر فيلزم أن تؤخذ بدل الدلالة ق َ الدلالة المشتقة

تحقق بها ايضا المعادلة (١) المتقدمة (فيسيت) شو هدانه

اخذ المتغير س في الازدياد حتى وصل أو زاد عن مقدار كالمقدار

الذى به تنعدم الدلالة ق امكن انخارج قسمة $\frac{ق}{ق_1}$

من السلب الى الايجاب أو من الايجاب الى السلب أو أنه يكون

ملازما العلامة الأصلية فأما في الحالة الاولى وهي الانتقال

من السلب الى الايجاب فان جملة علامات الدلالات ق، ق١، ق٢

..... ق ن يترتب عليها انعدام مغايرة من جهتها اليمنى وأما

في الحالة الثانية وهي الانتقال من الايجاب الى السلب فانه يترتب

عليها زيادة مغايرة في جهتها اليسرى وأما في الحالة الثالثة

وهي أن الخارج يكون ملازما العلامة الأصلية فان عدد مغايرات

جملة العلامات المذكورة لا يتغير وحينئذ لا ينشأ عن انعدام

واحدة من الدلالات المتوسطة بين الدلالتين ق، ق١ زيادة

ولا نقص في عدد المغايرات ومن هنا تستنبط النظرية الآتية

التى تستعمل بدل النظرية المتقدمة (فيسيت) عندما تكون الدلالة

ق ليست مشتقة من الدلالة ق

وأما الفرق بين عدد ما للمعادلة ق = ٠ من الجذور المحصورة

هندسی اسطودم فی نظريته فنقول

ا كانت دم انه

بت أن ق دلالة مشتقة من ق فيذا هد

كانت متخالفة

اانعدمت الدلالة ق هذه في فرض س = م

ومتحدة معها

العلاقة مع الدلالة ق في فرض س = حـ و

ويمكن لبيان ذلك أن يقال

العلاقة في فرض س = حـ + و

بنتقل دائما من السلب

على وجه الاختصار انخارج قسمة $\frac{ق}{ق}$

الى الايجاب متى انعدمت الدلالة ق

فقد عرفنا الآن ان الدلالة ق ليست مشتقة من الدلالة ق

وانه ... كثيرة الحدود درجتها دون درجة ق وانها

... على مضروب حقيقي بدرجة او لا يكون مشتركا بينهما

... الكثيرة الحدود ق

بين ق فانه يمكنا ...

... كثيرة الحدود اخرى كالكميات ق ، ق ، ...

... دون ... الدرجة ... درجتها مكونة لمتوالية

متناقصة ... بواسطة عمليات قسمة متوالية كما سبق في

الكمية الكثيرة الحدود المشتقة (...)

واذا لوحظت الجملة المتكونة من الدلالات ق ، ق ، ق ، ... ق

لان الدلالات ف و ف و ... و ف المساوية بالتناظر للدلالات ط و ط و ... و ط مضروبة فى ق تكون بالنسبة لمقدار مخصوص مفروض فيهما للمتغير س متحدة فى العلامة مع الدلالات ط و ط و ... و ط أو متخالفة معها فى العلامة بحسب ما تكون الدلالة ق موجبة أو سالبة بالنسبة لهذا المقدار وبناء على ذلك يكون عدد المغايرات المتحصلة من علامات الدلالات ف و ف و ... و ف بالنسبة لأى مقدار يفرض للمتغير س مساويا دائما لعدد المغايرات المتحصلة من علامات الدلالات ط و ط و ... و ط

وحينئذ اذا فرض بالتوالى للمتغير س فى الدلالات ف و ف و ف و ... و ف المقداران ل و ى (بجعل ل أصغر من ى) كان الفرق الذى يزيد به عدد المغايرات المتحصلة من فرض س = ل عن عدد المغايرات المتحصلة من فرض س = ى مساويا لعدد الجذور المختلفة للمعادلة ق = ٠ المحصورة بين ل و ى وذلك بقطع النظر عن درجة تكرار كل جذر منها

ولنتصد لذكر واحدة من الملحوظات المتنوعة التى أبداها المهندس

ان الفرق ... في ...

... كان ... في ... المضروب

س ـ ح مختلط ... وبناء على ذلك تكون الدلالة ط

متحدة في العلامة مع حاصل الضرب د (ح ـ ن) (س ـ هـ) (س ـ ع)

فاذا يكون هذا الحاصل متفقا في العلامة مع الدلالة ط لان

المضروب س ـ ح ... وايضا

الدلالتان ط و ط متفقتين في العلامة فان فرض

ان ... الى المضروب س ـ ح الى + و وكانت

الدلالتان ط و ط متحدتين في العلامة

ومن هنا يؤخذ انه اذا فرض ان المتغير س يأخذ بالتوالي ـ في

الدلالات ط و ط و ط و لكل المقداران ل و ى (بجعل

ل اصغر من ى) كان الفرق الذي يزيد به عدد المغايرات

المتصلة من فرض س = ل عن عدد المغايرات المتصلة من

فرض س = ى مساويا العدد الجذور الحقيقية للمعادلة

ط = . المحصورين ل و ى

ط و [illegible]

فالعلامة في فرض س = حـ − و [illegible]

في فرض س = حـ + و

مثلاً اذا فرض أن

$$\text{ق} = (\text{س} - \text{ح})^{\text{م}} (\text{س} - \text{ء})^{\text{ن}} (\text{س} - \text{هـ}) (\text{س} - \text{ع})$$

حيث (كما في ...)

$$\text{ق}' = (\text{س} - \text{ح})^{\text{م}-1} (\text{س} - \text{ء})^{\text{ن}-1} \times \left\{ \begin{array}{l} \text{م} (\text{س} - \text{ء})(\text{س} - \text{هـ})(\text{س} - \text{ع}) \\ + \text{ن} (\text{س} - \text{ح})(\text{س} - \text{هـ})(\text{س} - \text{ع}) \\ + (\text{س} - \text{ح})(\text{س} - \text{ء})(\text{س} - \text{ع}) \\ + (\text{س} - \text{ح})(\text{س} - \text{ء})(\text{س} - \text{هـ}) \end{array} \right.$$

وبملاحظة ان $\text{ق} = (\text{س} - \text{ح})^{\text{م}-1} (\text{س} - \text{ء})^{\text{ن}-1}$ يوجد [illegible]

ق و ق' المتقدمين

$$\text{ط} = (\text{س} - \text{ح})(\text{س} - \text{ء})(\text{س} - \text{هـ})(\text{س} - \text{ع})$$

$$\text{ط}' = \left\{ \begin{array}{l} \text{م} (\text{س} - \text{ء})(\text{س} - \text{هـ})(\text{س} - \text{ع}) + \text{ن} (\text{س} - \text{ح})(\text{س} - \text{هـ})(\text{س} - \text{ع}) \\ + (\text{س} - \text{ح})(\text{س} - \text{ء})(\text{س} - \text{ع}) + (\text{س} - \text{ح})(\text{س} - \text{ء})(\text{س} - \text{هـ}) \end{array} \right.$$

اذا تقرر

فاذا رمز لهذه الكمية التقريبية [illegible] المعادلة بالدلالة د(س) = ٠
وفرض أن س = ح + ص [illegible] محتوية على ص [illegible]

$$(١) \ldots د(ح) + د'(ح)\,ص + د''(ح)\frac{ص^{٢}}{٢} + د'''(ح)\frac{ص^{٣}}{٢\times٣} + \ldots = ٠$$

واذا استخرج من هذه المعادلة مقدار ص بفرضنا الكميات ص٢ ص٣ [illegible] معلومة حدث

$$(٢) \ldots ص = -\frac{د(ح)}{د'(ح)} - \frac{١}{د'(ح)}\left[د''(ح)\frac{ص^{٢}}{٢} + د'''(ح)\frac{ص^{٣}}{٢\times٣} + \ldots\right]$$

[illegible] مقدار ص الذي يراد تحصيله دون العشر فيكون [illegible] ولذا نهمل في [illegible] القوى فيكون

$$ص = -\frac{د(ح)}{د'(ح)} \quad [illegible]$$

[illegible] ويضاف الناتج الى الكمية ح [illegible] لهذه الثابتة وفرض [illegible] وأجريت على هذا [illegible] بالعملية السابقة وجعل [illegible] رمز الناتج الذي [illegible] المطلوب حدث

$$[illegible] = \frac{[illegible]}{[illegible]}$$

ف اذا اريد تعيين الجذور الحقيقية للمعادلة ق = ٠ مع مزيد الضبط

في الطريقة التقريبية للمهندس نونون

٩٩٣ يبند متى علم ان جذر معادلة محصور بين عددين كالعددين ل ى
وكان لا ينحصر بين هذين العددين الا جذر واحد فاسهل طريقة
توصل الى اقرب مقدار لهذا الجذر هي ان يوضع على التوالى بدل المتغير
في المعادلة اعداد اخر محصورة بين العددين المذكورين مثلا
اذا فرض انه وضع بدل المتغير عدد كالعدد لا المحصور بين العددين
ل ى ى علم من علامة الناتج هل الجذر محصور بين العددين
ل ى لا او بين العددين ى ى لا فان كان محصورا بين العددين
ى ى لا فانه يوضع فيها بدل المتغير كمية كالكمية ف ومن
هنا يعلم هل الجذر محصور بين ى ى ف او بين لا ى ف
وبتوالي العملية حصر الجذر بهذه المثابة يتوصل الى تقدير
هذا الجذر بالتقريب المطلوب ومتى تحصل بالطريقة المذكورة
مثل هذا التقريب سهل توالى العمل بالطريقة الآتية المنسوبة
للمهندس نونون وهي
ليفرض هنا انه يراد تحصيل مقدار يكون دون الجذر بمنزلة اعشارية
يجب

فاذا فرض

فيجد ونحو يكون هذه الطريقة مضبوطة يلزم ان يتحقق انه اذا وضع
مقدار ص ووضع بدله في المعادلة فلا يكون للحد ود محوبة
على ص و ص و ص ارتباط بالاجزاء المائية من مقدار الطرف ول
من هذه المعادلة وحيث أنه لا يتأتى مثل ذلك في كثير من الأحوال
وانه ربما تحصل بدل المقدار التقريبي الذي يراد تحصيله للجذر
مقدار يبعد عن المقدار الحقيقي بكثير فيلزم حينئذ ان يتحقق بعد كل
تقريب هل جميع الأعشار التي حسبت تنسب كلها لمقدار الجذر
المطلوب ام لا

فاذا لوحظ في مبدأ الأمر المقدار ء للحادث من التقريب
الأول المبين برقمين اعشاريين فانه يلزم ان يوضع هذا
المقدار بدل المتغير في المعادلة واذا علم بواسطة علامة الناتج
عند مقارنتها بعلامات النواتج الحادثة من الاستبدالات
التي اجريت فيما سبق ان الجذر اكبر من الكمية ء او أصغر منها
لزم أن يوضع في المعادلة بدل المتغير $ء + \frac{١}{١٠٠}$ أو $ء - \frac{١}{١٠٠}$
فاما ان كان الناتج الحادث عن هذا الاستبدال الثاني مخالفا
في العلامة مع الاستبدال الأول فانه يثبت ان الكمية ء لا تختلف

وحيث أن مقدار ص المتحصل هو كمية دون $\frac{1}{100}$ فتكون كلتا الكميتين

ص٢ و ص٣ اقل من $\frac{1}{10000}$ ولذا يحسب مقدار ص الى $\frac{1}{10000}$

ثم يضاف الناتج الى الكمية أ

فان كان مقدار س المتحصل مقربا من $\frac{1}{10000}$ فانه يستعمل بهذه المثابة في حساب مقدار تقريبي آخر وفي هذه الحالة تجرى عملية القسمة التقريبية الى الخانة الثامنة من الاعشار ثم يتوالى العمل على هذا المنوال ويضعف في كل عملية عدد اعشار مقدار س الى ان يتوصل الى درجة التقريب المطلوبة

وينبغي في العمل ان يلاحظ ان التقاريب المتوالية تعلم كلها من قانون واحد وحينئذ اذا وضع على العموم

$$ص = -\frac{د(س)}{د'(س)}$$

لزم في ابتداء الامر ان يوضع ﺣ بدل س ثم يحسب مقدار ص الى $\frac{1}{100}$ ويضاف الناتج الى ج فيتحصل من ذلك المقدار الثاني التقريبي للكمية ﺣ ثم يوضع ۲ بدل س ويحسب مقدار ص الى $\frac{1}{10000}$ ويضاف الناتج الى ۲ فيتحصل من ذلك المقدار الثالث التقريبي وهلم جرا

التي ليست كافية وبناءً على ذلك اذا لم تطرح الجذور الحوالة اعني متناقصة امكن الاقتصار في العمل على تحقيق ... بأن تجب في مبدأ الأمر الا الارقام الاعشارية الكافية لتمام التقريب المطلوب

ولنمثل لذلك بالمعادلة

$س^{٣} - ٢ س - ٥ = ٠$

التي بها هو مقتضى ما تقدم انه لا يوجد لها غير جذر حقيقي واحد محصور بين ٢ و ٣ اذا بحث عنه بموجب هذه الطريقة تحصل

س = ٢٫٠٩٤٥٥١٤٩...

في الطريقة التقريبية للمهندس لاجرانج

٥٩٥ الطريقة التقريبية للمهندس لاجرانج لا يؤخذ منها عين الفائدة التي تؤخذ من طريقة المهندس نيوتن من جهة الاختصار في الاعمال لكنها مجردة عن الخطأ

مثلاً اذا فرض أن ح و ح+١ كناية عن عددين متواليين محصور بينهما جذر واحد للمعادلة وفرض أن $س = ح + \frac{١}{ص}$ فان المعادلة الناتجة المحتوية على ص كالمعادلة جذر اكبر من الواحد

عن الجذر الا بمقدار $\frac{١}{١٠٠}$ واما ان كان الناتجان متحدين في العلامة فانه يعلم من ذلك ان التقريب فيه خطأ أو أنه غير كاف وحينئذ يلزم لاستعمال الطريقة نيوتون أن يبدأ بمقدار مقرب بقدر الامكان وذلك بان يبحث عن رقم الاجزاء المائينية بالمثابة المعروفة في اول البند السابق

وعلى هذا المنوال يجرى العمل في المقادير الحادثة من باقي التقاريب أعني انه يلزم بعد اجراء كل عملية ان يوضع في مبدإ الأمر بدل المتغير المقدار المتحصل ثم يوضع بدل المتغير ايضاً هذا المقدار مضافاً اليه أو مطروحاً منه رقم آخر مرتبة فان كان لا يتحصل من التقريب الثاني الذي يؤخذ فيه أربعة ارقام اعشارية مقدار مقرب من المقدار الحقيقي بكمية اقل من $\frac{١}{١٠٠٠٠}$ قطع النظر عن الرقم الاعشاري الأخير وان كانت الارقام الباقية مضبوطة اجريت عملية تقريب آخر ممتد الى $\frac{١}{١٠٠٠٠٠٠}$ لكنه يقطع النظر فيه بعد العمل عن رقم أو رقمين من الارقام الاعشارية وبالجملة فلا يلزم تحقيق كل تقريب على الفور لان طريقة الحساب تكفي في الاعمال غالباً لبيان التقاريب المحتوية على الخطأ أو لتصليح التقاريب

التي

$$س = ح + \cfrac{١}{ز + \cfrac{١}{ح + ...}}$$

٢٩٦ ويمكن حساب المعادلات المحولة المتوالية المحتوية على ص و م ز و ... بواسطة المشتقات المتقدمة (في ٢٩٥)

وحيث ان المعادلة المفروضة مبينة بالصورة د(س) = ٠

فتكون المعادلة المتحصلة من فرض س = ح + $\frac{١}{ص}$ مبينة بالصورة

$$د(ح) + د'(ح) \frac{١}{ص} + \frac{د''(ح)}{٢} \frac{١}{ص^٢} + \frac{د'''(ح)}{٢×٣} \frac{١}{ص^٣} + ... = ٠$$

واذا احذفت المقامات بواسطة ضربها في $ص^م$ (و م هو كمية عدد درجة المعادلة) فانه يتحصل من ذلك

$$د(ح) ص^م + د'(ح) ص^{م-١} + \frac{د''(ح)}{٢} ص^{م-٢} + \frac{د'''(ح)}{٢×٣} ص^{م-٣} + ... = ٠$$

واذا رمز للطرف الاول من هذه المعادلة بالرمز $د_١$ (ص) آلت المعادلة المحولة الى

$$د_١(ز) ز^م + د'_١(ز) ز^{م-١} + \frac{د''_١(ز)}{٢} ز^{م-٢} + \frac{د'''_١(ز)}{٢×٣} ز^{م-٣} + ... = ٠$$

ومثل ذلك يجري في باقي المعادلات المحولة

٢٩٧ ومتى كان يوجد بين العددين ح و ح + ١ عدة جذو

ولا يوجد بين جذور هذه المعادلة الا جذر واحد اكبر من الواحد لانه

لو كان الامر بخلاف ذلك لوجد للمتغير س عدة مقادير محصورة بين

العددين المتواليين ﻫ و ﻫ +١ وهذا مخالف للفرض وحينئذ

يمكن تعيين الجزء الصحيح من مقدار ص بأن توضع بالتوالى في

المعادلة المحتوية على ص الاعداد الصحيحة ١ و ٢ و ٣

وهكذا الى أن يحصل ناتجان متخالفان في العلامة

ولنفرض أن ﻫ١ و ﻫ١ +١ كناية عن العددين اللذين يحدث

منهما الناتجان المتخالفان في العلامة وجعل ص = ﻫ١ + $\frac{1}{ذ}$

فان المعادلة الناتجة المحتوية على ذ لا يكون لها غير جذر

اكبر من الواحد وحينئذ يمكن تعيين الجزء الصحيح من مقدار ذ

بواسطة اجراء عملية مشابهة للعملية التى اجريت على ص

فان كان ﻫ٢ هو الجزء الصحيح من مقدار ذ جعل ذ = ﻫ٢

+ $\frac{1}{ﻭ}$ وهلم جرا

وبناء على ذلك يتوصل بواسطة مثل هذه الحسابات الى مقدار

للمتغير س يكون مبينا بالكسر المتسلسل

بين ٢ و ٣ (كما تقدم في بند ٥٠٦) فاذا فرضت س = ٢ + $\frac{1}{ص}$ حدث

$$د(٢) = ٢^٣ - ٢ \times ٢ - ٥ = -١ \quad ن$$

$$دَ(٢) = ٣ \times ٢^٢ - ٢ = ١٠ \quad ن$$

$$\frac{١}{٢} دً(٢) = ٣ \times ٢ = ٦ \,.$$

$$\frac{١}{٢ \times ٣} دًّ(٢) = ١$$

ومن هنا نوخذ المعادلة المحولة

$$ص^٣ - ١٠ص^٢ - ٦ص - ١ = ٠$$

التي يشاهد فيها بالسهولة من غير اجراء عملية الاستبدال انه يحدث من ص = ١٠ ناتج سالب وحيث انه يحدث من ص = ١١ ناتج موجب (كما تقدم في بند ٥٠٦) فيكون مقدار المتغير ص محصوراً بين ١٠ و ١١ وحينئذ اذا فرض ان ص = ١٠ + $\frac{1}{ق}$ حدث

$$هـ(١٠) = ١٠^٣ - ١٠ \times ١٠^٢ - ٦ \times ١٠ - ١ = -٦١ \quad ن$$

$$هـَ(١٠) = ٣ \times ١٠^٢ - ٢٠ \times ١٠ - ٦ = ٩٤ \quad ن$$

$$\frac{١}{٢} هـً(١٠) = ٣ \times ١٠ - ١٠ = ٢٠ \quad ن$$

$$\frac{١}{٢ \times ٣} هـًّ(١٠) = ١$$

ومن هنا نوخذ المعادلة المحولة الثانية

للمعادلة المفروضة كان للمعادلة المحولة المحتوية على ص المتحصلة من فرض $س = ه + \frac{1}{ص}$ عدة جذور اكبر من الواحد وحينئذ لا يكون وضع الاعداد الصحيحة ١، ٢، ٣ ... بدل ص كافيا لتعيين الاجزاء الصحيحة من مقادير ص لكن متى استخرجت الجذور بأى طريقة سهل دائما معرفة العدد الذى يلزم ان تضرب فيه الجذور المحصورة بين تلك الاعداد الصحيحة لكى تتبدل بأعداد اخرى تكون اجزاؤها الصحيحة مختلفة عن بعضها وبهذه المثابة يؤول دائما حساب المقادير التقريبية للجذور بواسطة طريقة لاجرانج الى ما سبق فاذا لم تكن فروق الجذور المحصورة بين العددين الصحيحين المتواليين ه و ه+١ كسورا صغيرة فانه يمكن اجراء العملية على المعادلة المفروضة كما فى المثال الثانى

المثال الاول

٢٩٨ — اذا فرضت المعادلة

$$س^٣ - ٢ س - ٥ = ٠$$

شوهد أن هذه المعادلة ليس لها الا جذر حقيقى واحد محصور بين

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

دون [illegible]

[illegible]

[illegible]

مثال

وإذا فرضت المعادلة [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

يجب بدل س [illegible]

$س^2 - ٢٨ س + ٤٦ = ٠$

$$٦١ ز^{٣} - ٩٤ ز^{٢} - ٢٠ ز - ١ = ٠$$

التي يحصل منها مقدار موجب بفرض ز = ٠ وجذ يكون مقدار ز محصوراً بين ١ و ٢ وعلى ذلك اذا جعل $ز = ١ + \frac{١}{و}$ حدث

$$ت(١) = ٦١ \times ١^{٣} - ٩٤ \times ١^{٢} - ٢٠ \times ١ - ١ = -٥٤ \quad و$$

$$تَ(١) = ١٨٣ \times ١^{٢} - ١٨٨ \times ١ - ٢٠ = -٢٥ \quad و$$

$$\frac{١}{٢} تً(١) = ١٨٣ \times ١ - ٩٤ = ٨٩ \quad و$$

$$\frac{١}{٢ \times ٣} تً(١) = ٦١$$

ومن هنا نوخذ المعادلة المحولة الثالثة

$$٥٤ و^{٣} + ٢٥ و^{٢} - ٨٩ و - ٦١ = ٠$$

التي يعلم منها ان مقدار و محصور بين ١ و ٢ وبتوالي العمل على قدر الكفاية يشاهد أن الجذر المطلوب مبين بالكسر المتسلسل

$$س = ٢ + \cfrac{١}{١٠ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{٢ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{٣ + \cfrac{١}{١ + \text{الخ}}}}}}}}$$

الذي

ويأخذ الآلة السابعة يستخرج من هذا الكسر مقدار مقرب من الجذر بأربعة ارقام اعشارية هو المقدار ٣ ، ٣٨٦٠
ومن هنا يؤخذ أن مقدارى الجذرين الموجبين من المعادلة المفروضة المقربين بأقل التقريب من $\frac{١}{١٠٠٠٠}$ يكونان مبينين بالمقدارين

١٫٣٥٦٩ و ١٫٦٩٢٠

وإذا اريد حساب الجذر السالب بوضع − س بدل س في المعادلة المفروضة فنؤول الى

$$س^٣ - ٧ س - ٧ = ٠$$

ومنها يحدث

$$س = ٢ + \cfrac{١}{٢٠ + \cfrac{١}{٣ + ...}}$$

ويمكن الاستغناء عن حساب هذا الجذر الثالث لأن مجموع الجذور الثلاثة يساوي صفرا وما كان المقدار المطلق للجذر السالب مساويا لمجموع الجذرين الموجبين

ويمكن أيضا حساب الجذرين الموجبين بدون أن نجري على المعادلة اى تحويل لان أحدهما محصور بين ١ و $\frac{٣}{٢}$ والآخر بين

التي يلزم أن يكون لها جذران أحدهما محصور بين ٢ و ٣ والآخر بين ٣ و ٤

فاذا اجريت على هذه المعادلة عملية كعملية المثال السابق شوهد أن جذرها الأول مبين بالكسر المتسلسل

$$٢ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{٢ + \cfrac{١}{٢ + \cfrac{١}{٤ + \text{الخ}}}}}$$

وبأخذ الآيلة الخامسة يستخرج من هذا الكسر مقدار مقرب من الجذر بأربعة أرقام اعشارية هو المقدار ٢٫٧١٣٨ ويكون جذرها الثاني المحصور بين ٣ و ٤ مبيناً بالكسر المتسلسل

$$٣ + \cfrac{١}{٢ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{٩ + \text{الخ}}}}}}}}$$

فنفرض المجهولين [illegible] بالصورة

(١) ...... $ح س^{م} + ع س^{م-١} + هـ س^{م-٢} + ...$

وحيث أن م يدل على درجة المعادلة [illegible] مركبة

غير محتوية على ص و ع كمية محتوية على ص بدرجة أولى

و هـ كمية محتوية على ص بدرجة ثانية وهكذا الى ان كمية

ك الغير محتوية على ص بدرجة لا يزيد اسها عن م ويمكن

هنا نوقف في الحالة التي تكون فيها المعادلة تامة الحدود

$$ع = ع_{٠} + ع_{١} ص$$

$$هـ = هـ_{٠} + هـ_{١} ص + هـ_{٢} ص^{٢}$$

$$. . . . .$$

$$ك = ك_{٠} + ك_{١} ص + ك_{٢} ص^{٢} + ك_{م} ص^{م}$$

وحينئذ نوضع المعادلة العمومية ذات المجهولين التي درجتها م

بالصورة

(٢) $ح س^{م} + (ع_{٠} + ع_{١} ص) س^{م-١} + (هـ_{٠} + هـ_{١} ص + هـ_{٢} ص^{٢}) س^{م-٢} + ...$

$$+ ك_{٠} + ك_{١} ص + ... + ك_{م} ص^{م} = ٠$$

فاذا فرض أن م = ٢ تحصلت المعادلة العمومية ذات المجهولين

٢ و ٣ ، فاذا فرض أن س = ١ + $\frac{١}{ص}$ كان للمجهول ص مقداران موجبان أحدهما أكبر من ٢ ، والآخر محصور بين ١ و ٢ ، وحينئذ تكون المعادلة الحادثة من وضع ١ + $\frac{١}{ص}$ بدل س مبينة بالصورة ص^{٣} − ٤ص^{٢} + ٣ص + ١ = ٠ . فان فرض أن ص = ١ كان الناتج موجبا وان فرض أن ص = ٢ كان الناتج سالبا وان فرض أن ص = ٣ كان الناتج موجبا وبناء على ذلك يكون الجزء الصحيح من أكبر مقدار يفرض للمتغير ص هو ٢ ، واذا جعل ص = ٢ + $\frac{١}{ع}$ و ص = ١ + $\frac{١}{ع}$ تحصل من ذلك المعادلتان محولتان يكون لكل واحدة منها جذر أكبر من الواحد

الباب الحادى عشر

فى طريقة الحذف المتعلقة بحل معادلتين بدرجة ما من المعادلات ذات المجهولين وفى المعادلة التفاضلية وفى صورة المعادلات ذات المجهولين

تنبيه : اى معادلة ذات مجهولين بدرجة م ، ان كانت مرتبة بحسب

واحد

المعادلة مكررات عدد عن بواحد ينقص مجهولين ذات م

بالصورة هذا العدد حينئذ يكون

٢ + ٣ + ٤ + ... + (م + ١) أو ½ م (م + ٣)

بن أن احد المكررات المجهولة ب وللواحد فيلزم لتحصيل معادلتين باقى

ان تكون المعادلة المطلوبة محتوية على حد مسبوق بمكرر

للفرض المتقدم فان تعذر الحصول على ذلك ترتب على هذا

جعل معادلتين باقى مكررات غير محدودة ولذا يؤثر اجتناب

من قبيل الحل

ملحوظات اولية تتعلق بحل معادلتين من المعادلات

ذات المجهولين

• اذا اريد حل معادلتين من المعادلات المحتوية على المجهولين

ص وكان س داخلا فى واحدة منهما بدرجة اولى

مباشرة استخراج مقدار س من هذه المعادلة بالنسبة

ثم يوضع هذا المقدار فى المعادلة الاخرى فتحدث من

المعادلة تكون محتوية الاعلى ص وحينئذ اذا علمت

ص ووضعت على التوالى فى مقدار س المستخرج

التي بدرجة ثانية

$$ح ش + (ي + ي ص) س + ي + ي ص + ي ص^2 =$$

بيند وحيث أن المعادلة لا تتغير بقسمة جميع حدودها على عدد ولحد فيفرض أن مكرر واحد من حدود المعادلة (ب) كمكرر الحد الأول مثلا يساوي الواحد لكن اذا جعل ح = ١ تغيرت الصورة العمومية للمعادلة لانها لا تكون حينئذ مشتملة على المعادلات ذات الدرجة م التي تكون محتوية على القوة الميمية للمجهول س

بيند فاذا لزم تبيين مكررات معادلة عمومية ذات مجهولين على وجه بحيث تتحصل من ذلك معادلة خصوصية تكون محققة للشروط المطلوبة فانه يمكن ان يفرض أن مكرر احد حدود المعادلة التي يراد تحصيلها يكون مساويا للواحد فان لم يسلم هذا الفرض كان واحد من المكررات المجهولة اختياريا وعندما تتحصل مقادير سائر المكررات التي تتعين بواسطة هذا المكرر الاختياري وتوضع في المعادلة العمومية يصير هذا المكرر الاختياري معروفا مشتركا في جميع الحدود فيحذف

ومن هنا يؤخذ أن عدد الشروط اللازمة لتعيين معادلة تامة مجهولة بدرجة م

فاذا ضربت هاتان المعادلتان فى بعضهما طرفاً بطرف تحصلت من
ذلك معادلة مجردة عن العلامات الجذرية هى

(ع + ٢ √ك)(ع − ٢ √ك) = ٠ أى ع٢ − ك٢ ك = ٠

ويمكن لتحصيل جميع مقادير ص التى تتحقق بها المعادلتان الاوليان
ان تحل هذه المعادلة الأخيرة وهذه المعادلة يمكن استنباطها
من المعادلتين (١) و (٢) لانه اذا حول فى كل من هذه المعادلات
الجزء غير المنطق الى الطرف الثانى من كل معادلة ورفع كل منهما الى القوة
الثانية حدث

ع٢ = ك٢ ك ومن هنا يحدث ع٢ − ك٢ ك = ٠

ومتى علمت مقادير ص تحصلت مقادير س بواسطة هذه
القاعدة وهى

بند ٣٠٣ اذا تحللت الاطراف الاول من المعادلتين المفروضتين
مضاريب منطقة بالنسبة للمجهولين آل تجلة هاتين المعادلتين
الى حل عدة جمل أخرى أبسط منها ولبيان ذلك يرمز الى المفروضة
بالمعادلتين م = ٠ و ح = ٠ وبفرض أن م = ع عَ عً
و ح = ق قَ (بجعل ع و عَ و عً و ق قَ قً و قٌ رموز ا

بالنسبة الى ص تحصل مقادير المتغير س المطابقة لهذه المقادير

ويمكن ايضاً استعمال هذه الطريقة في الحالة التي تكون فيها احدى المعادلتين محتوية على المتغير س بدرجة ثانية وهذه المعادلة يتحصل منها لهذا المتغير مقداران هما ج+ √ك و ج- √ك (بجعل ج و ك رمزين للدالتين المنطقتين للمتغير ص) فاذا وضع كل واحد من هذين المقدارين بالتوالي في المعادلة الثانية بدل المتغير س تحصلت من ذلك معادلتان كلتاهما محتوية على ص وحينئذ توخذ من حلها تين المعادلتين جميع مقادير ص المحققة للمعادلتين المذكورتين وبناء على ذلك توضع المعادلة الحادثة من وضع ج+√ك بدل المتغير س في المعادلة الثانية من المعادلتين المفروضتين بالصورة

ج + ب √ك = ٠ ......(١)

(بجعل ج و ب كناية عن دالتين منطقتين للمتغير ص)

وحيث ان المعادلة الحادثة من وضع ج- √ك بدل المتغير لا تختلف عن المعادلة السابقة الا بعلامة الجزء غير المنطق فيحدث

ج - ب √ك = ٠ ......(٢)

فاذا

وحينئذ تحصل حلول الجملة المفروضة بواسطة حل هذه الجمل الآتية

س − ص + ١ = ٠	س − ص + ١ = ٠	س − ص − ١ = ٠	س − ص − ١ = ٠
س + ص − ٧ = ٠	س + ص − ٣ = ٠	س + ص − ٧ = ٠	س + ص − ٣ = ٠

بطريق التوالى

بند اذا كانت الاطراف الاولى من المعادلتين المفروضتين تحتوى على مضروب مشترك تحققت المعادلتان بكل اثنين من قيم المجهولين التى يترتب عليها جعل هذا المضروب المشترك مساوياً للصفر وحينئذ يتحصل من ذلك عدد غير محدود من الحلول فان كان المضروب المشترك لا يحتوى الا على س فيجعل مساوياً للصفر تحدث منه معادلة يتعين بها عدد محدود من مقادير س يمكن ان نضم اليها أى مقادير مفروضة للمتغير ص واذا كان المضروب المشترك لا يحتوى الا على ص فانه ينتج منه مقادير معينة للمتغير ص يمكن ان نضم اليها أى مقادير مفروضة للمتغير س واذا كان المضروب المشترك مشتملاً على المتغيرين س و ص فبجعله مساوياً للصفر تحدث منه معادلة يمكن ان نعطى فيها لاحد المتغيرين مقادير اختيارية يتعين بها مقادير المتغير الآخر

للضاريب المنطقة بالنسبة للمجهولين س و ص) نتحصل من

الجملة م = ٠ و ع = ٠ بالبحث عن حلول الجمل المتنوعة الآتية

وهى

عُ = ٠	م = ٠	عَ = ٠	مَ = ٠	عٌ = ٠	عً = ٠
ق = ٠	قَ = ٠	ق = ٠	قَ = ٠	ق = ٠	قً = ٠

فاذا فرضت مثلاً المعادلتان

$$\text{س}^2 - 2\,\text{س}\,\text{ص} + \text{ص}^2 - 1 = 0 \quad \text{و} \quad \text{س}^2 + 2\,\text{س}\,\text{ص} + \text{ص}^2 - 10\,\text{س} - 10\,\text{ص} + 21 = 0$$

فانه يشاهد بالسهولة ان الطرف الأول من المعادلة الاولى يؤول الى

$$(\text{س} - \text{ص})^2 - 1 \quad \text{أى} \quad (\text{س} - \text{ص} + 1)(\text{س} - \text{ص} - 1)$$

واذا اريد الوقوف على هذه الحقيقة وهى هل يمكن تحليل المعادلة الثانية الى ضاريب منطقة نحل هذه المعادلة بالنسبة الى س فيحدث

$$\text{س} = -\text{ص} + 5 \pm 2$$

ومن هنا ينتج

$$\text{س}^2 + 2\,\text{س}\,\text{ص} + \text{ص}^2 - 10\,\text{س} - 10\,\text{ص} + 21 = (\text{س} + \text{ص} - 7)(\text{س} + \text{ص} - 3)$$

حـ

مفروضة للمتغير س

وتحصل باقي الحلول بواسطة الجمل الثلاث الآتية وهي

(١) ص + ١ = ٠ و $س^٢ - ص^٢$ − ٦ ص − ٩ = ٠ و

(٢) ص − ٢ = ٠ و $س^٢$ + ٢ ص س + $ص^٢$ − ١ = ٠ و

(٣) $س^٢$ + ٢ ص س + $ص^٢$ − ١ = ٠ و $س^٢ - ص^٢$ − ٦ ص − ٩ = ٠

فأما الجملة الاولى فيحصل منها للمتغيرين ص و س اربعة مقادير

ص = −١ و س = ٢ و ص = −١ و س = −٢

وأما الجملة الثانية فيحدث منها لها اربعة مقادير هي

ص = ٢ و س = −١ و ص = ٢ و س = −٣

وأما الثالثة فيمكن حلها بعمليات حسابية مشابهة للعمليات التي اجريت في المثال السابق بحيث يحصل منها للمتغيرين س و ص

اربعة مقادير هي

ص = −١ و س = ٢ و ص = −٢ و س = ١

بند ٣٠٦ فاذا فرضت الآن المعادلتان

$س^٣ - ص^٣$ − ٣ س ص + ٢ $ص^٢$ = ٠ و

٢ $س^٢$ − ٢ س ص − $ص^٢$ = ٠

بند ولنمثل للمعادلتين اللتين يوجد بينهما مضروب مشترك لا يحتوى الا على واحد من المجهولين بمثال ـــ هو

$$(ص^{٢}-١)\,س^{٢}+(٢ص^{٣}-٢ص)\,س+ص^{٤}-٢ص^{٢}+١=٠ \quad و$$

$$(ص^{٢}-٣ص+٢)\,س^{٢}-ص^{٤}-٣ص^{٣}+٧ص^{٢}+١٥ص-١٨=٠$$

فاذا اجريت عملية الحسابات اللازمة لايجاد القاسم المشترك الأعظم بين المكررات المتنوعة لقوى س وبين الاجزاء التى تشتمل على هذا المتغير فى المعادلة الاولى شوهد ان هذه الكميات تكون قابلة للقسمة على $ص^{٢}-١$ أو $(ص-١)(ص+١)$ وأن خارج قسمة الطرف الأول من المعادلة على $ص^{٢}-١$ يساوى $س^{٢}+٢ص\,س+ص^{٢}-١$ وان الطرف الأول من المعادلة الثانية يكون قابلا للقسمة على الكمية ذات الحدود الثلاثة $ص^{٢}-٣ص+٢$ المكافئة للكمية $(ص-١)(ص-٢)$ وان خارج القسمة يساوى $س^{٢}-ص^{٢}-٦ص-٩$ وحينئذ يمكن وضع المعادلتين المفروضتين هكذا

$$(ص-١)(ص+١)(س^{٢}+٢ص\,س+ص^{٢}-١)=٠ \quad و$$

$$(ص-١)(ص-٢)(س^{٢}-ص^{٢}-٦ص-٩)=٠$$

وهاتان المعادلتان تتحققان بوضع $ص=١$ مع اى مقدار بـ

مفروض

لا تستوى الا بقيمة المتغير ح وهات ان المعادلتان تكونان محققتين
بالمقدار س=ح ولذا يكون للطرفين الاولين من المعادلتين
قاسم مشترك مشتمل على المضروب س-ل وحينئذ يقال
اذا علمت معادلتان بمجهولين لزم لكي يكون اى مقدار اختيارى
مفروض لواحد من المجهولين كالمجهول ص مثلا محققا للهاتين
المعادلتين انه اذا وضع هذا المقدار فى المعادلتين كان للطرفين
الاولين قاسم مشترك هو دالة للمجهول الآخر س وبالعكس
اذا كان للطرفين الاولين من المعادلتين بعد استبدال مقدار
ص قاسم مشترك هو دالة س كان هذا المقدار المفروض
للمتغير ص يكون محققا للمعادلتين فان جعل هذا القاسم المشترك
مساويا للصفر تحصلت من ذلك معادلة جذورها هى المقادير
المطابقة للمجهول الآخر س
وبنا على ذلك يلزم لتحصيل الحلول المشتركة بين المعادلتين
٣٠٨ المفروضتين ان تجرى على طرفيها الاولين بمقتضى القاعدة السابقة
العمليات التى يراد اجراؤها عليهما اذا اريد ايجاد قاسمهما المشترك
الأعظم

شوهد مباشرة انه يمكن وضع المعادلة الاولى بالصورة
(س − ص) (س٢ + س ص + ص٢ − ٣ص) = ٠ والثانية بالصورة
٢س٢ − ٢س ص + س٢ − ص٢ = ٠ أو (س − ص) (٣س + ص) = ٠
ومن هنا يؤخذ ان س − ص = ٠ فيكون للمعادلتين عدد غير محدود
من الحلول

ويلزم لتحصيل باقي الحلول ان تحل المعادلتان
س٢ + س ص + ص٢ − ٣ص = ٠ و ٣س + ص = ٠
فيحصل من ذلك للمتغيرين س و ص مقدارانها س = ٠
و ص = ٠ (وهذان المقداران هما من حلول المعادلة س − ص = ٠)
ومقداران آخرانها س = $\frac{٩}{٧}$ و ص = $\frac{٢٧}{٧}$

في الطريقة العمومية المتعلقة بحل معادلتين رقميتين بمجهولين

بند ٢٠٧ اذا فرضت معادلتان بدرجة ما وبمجهولين كالمجهولين
س و ص وكان س = ل و ص = ع حلا مشتركا
بين هاتين المعادلتين وعوضنا عن وضع ل بدل س و ع
بدل ص ووضع ع بدل ص فقط تحصلت من ذلك معادلتان

لا [illegible] الصفر بخلاف الخارج فانه يصير
[illegible] ان يكون الحد ب × خ مقدار
[illegible] ان لايكون ق مساويًا للصفر
[illegible] الكمية ج على الكمية ب اللتين
[illegible] قسمتهما انقضت الكمية الكبيرة
[illegible] على ص فاذا رمزنا لهذا المضروب
[illegible] وللخارج الذي نحصل بعد اجراء عملية التصليح بالرمز خ
وللباقي [illegible] ق حدث

ه ج = ب خ + ق

ومن هذه المساوية يؤخذ أن حلول المعادلتين ب = ٠ و ق = ٠
لاتختلف عن حلول المعادلتين ه ج = ٠ و ب = ٠ وحينئذ
نقسم هاتان المعادلتان الى حلين آخرين بينهما

ج = ٠ و ب = ٠ و ه = ٠ و ب = ٠

وبناءً على ذلك تكون المعادلتان ب = ٠ و ق = ٠ متحققتين
بجميع حلول المعادلتين المفروضتين وتتحققان ايضًا بجميع حلول
المعادلتين ه = ٠ و ب = ٠ التي ربما كانت غير

فاذا رمز الى هاتين المعادلتين بالصورتين جـ = ٠ ، أ = ٠ [illegible]

وفرض أن درجة أ بالنسبة الى س لا تزيد عن درجة [illegible]

وأمكن اجراء عملية قسمة جـ على أ وكان خارج القسمة خاليًا عن المقامات المحتوية على ص بحيث لا يقتضي اجراء عملية تصليحها بحفظ هذا الشرط وجعل ع رمزًا للخارج و ف رمزًا للباقي حيث

جـ = أ ع + ف

ومن هذه المتساوية يؤخذ ان جميع معادير المجهولين المستخرجة من المعادلتين جـ = ٠ و أ = ٠ تكون محققة للمعادلة ف = ٠ لان الخارج ع لا يكون غير محدود في فرض المقادير المحدودة للمجهولين س و ص وبمثل ذلك يبرهن على ان جميع المقادير المحققة للمعادلتين أ = ٠ و ف = ٠ تكون محققة ايضًا للمعادلة جـ = ٠ وحينئذ يمكن استعواض المعادلتين جـ = ٠ و أ = ٠ بالمعادلتين أ = ٠ و ف = ٠ البسيطتين من هاتين المعادلتين اللتين درجة طرف احداها وهو ف أقل من درجة طرف الاخرى وهو أ بالنسبة الى س

ولا يتأتى مثل ذلك اذا كان الخارج ع محتويًا على مقامات مشتملة على ص

حيث انه لم يبق علينا الا بيان الكيفية التي يجب صيغتها في حوى معادلتين لا تكونان محققتين [illegible] [illegible]

فاجعل م ه ح رموزًا لقاسم المشترك بين قسمة الطرفين الأولين من المعادلتين المفروضتين لاجل جميع المضاريب المشتملة على ص و م رمزًا للعدد الذي يلزم ان يضرب فيه ا حتى لا تتعذر قسمته على ا و ك رمزًا للخارج قسمتهما على بعضهما و ى رمزًا للباقي واجعل ى كناية عن حاصل ضرب مضاريب هذا الباقي المشتملة على ص و م رمزًا للمضروب الذي يلزم ان يضرب فيه ا حتى لا تتعذر قسمته على ى و ك رمزًا للخارج قسمتهما على بعضهما و ى رمزًا للباقي واجعل ى كناية عن حاصل ضرب مضاريب هذا الباقي المشتملة على ص وهلم جرا وفرضنا لاجل الاختصار انه تحصل من القسمة الرابعة باق غير مشتمل على ص ورمزنا لهذا الباقي بالرمز ى تحصلت من ذلك المتساويات

$$\left\{\begin{array}{l} \text{هـ ح} = \text{ا ك} + \text{ب ى ق} \\ \text{هـ ا ح} = \text{ر ك} + \text{ب ا ى ق} \\ \text{هـ ا ا ح ر} = \text{ب ا ك} + \text{ب ا ا ى ق} \\ \text{هـ ا ا ا ر ا} = \text{ب ا ا ك} + \text{هـ ى} \end{array}\right. \quad \ldots\ldots\ldots (١)$$

ولنفرض أن م رمز للقاسم المشترك الاعظم بين هـ و ى و م رمز للقاسم المشترك الأعظم بين $\frac{\text{هـ}}{\text{م}}$ و ى و م ا رمز للقاسم المشترك الأعظم بين $\frac{\text{هـ ا}}{\text{م م ا}}$ و ى و م ا ا رمز للقاسم المشترك الأعظم بين $\frac{\text{هـ ا ا}}{\text{م م ا م ا ا}}$

محققة للمعادلة م = ٠

وأما المعادلتان ر = ٠ و ق = ٠ فتجرى عليهما عملية مشابهة للعملية التى أُجريت على المعادلتين م = ٠ و ر = ٠ وبهذه المثابة تتحصل معادلتان احداهما ق = ٠ والأُخرى دونها فى الدرجة بالنسبة الى س وهاتان المعادلتان تحققان بجميع حلول المعادلتين ر = ٠ و ق = ٠ وبحلول اخرى غير هذه وبتوالى العمل هكذا يتوصل دائماً الى معادلتين احداهما غير محتوية على س فاذا تعينت جميع حلول هاتين المعادلتين تحصلت من ذلك جميع حلول المعادلتين المفروضتين وكذا حلول المعادلات الناشئة من اجراء عملية التصليح على المقاسيم المتوالية

بند ٣٠٩ فان وجدت فى الطرفين الاولين من المعادلتين المفروضتين مضاريب لا تشتمل الا على ص اختصرت العملية بحذف هذه المضاريب لكنه ينبغى ملاحظة الحلول التى يمكن تحصيلها من هذه المضاريب كما تقدم (فى بندى ٣٠٣ و ٣٠٤) ثم تحذف ايضاً من البواقى المتوالية المضاريب التى لا تشتمل الا على ص وتلاحظ الحلول المتحصلة منها

بند ٣١٠

...صل نسبة اذا ضربت ... ... تضرب المعادلة (٣)

. و في المعادلة الناتجة يستعوض ... بالطرف الثاني

معادلة الثانية من المعادلات (١) فيحدث

هـ/م ب = (هـ ر + ك / م) ر + ك/م ... ا

ة هـ ر + ك / م عدد صحيح لان ر و ك يقبلان

ة على م وهذه الكمية تقبل القسمة ايضًا على م١ لان

سم كلا من هـ/م و ر وهو أوّلي مع ر وعلى

، اذا قسم كلا من طرفي المعادلة المذكورة على م١ وجعل

جه الاختصار

ك/م = ع و هـ ر + ك / م م١ = ع حدث

..... هـ/م م١ ب = ع ر + ح ب١/م١

ارتباط بين ب و ر و ب١/م١ تضرب في مبدا الامر

لة الثانية من المعادلات (١) في هـ/م فيحصل

ب = هـ ك/م ر + هـ/م ب١ وحيث ان هـ/م و ب١

القسمة على م١ فيلزم ان م١ يقسم ايضًا هـ ك/م

ان م١ أوّلي مع ر وقد فرض على وجه الاختصار أنّ

ثم نبرهن على أنه يمكن كتابة جميع [illegible] المعادلتين ح = ٠ و ى = ٠ الأولى [illegible]

[illegible] وذلك بإدخال المعادلات

(٢) [illegible]

ثم نبرهن في [illegible] على [illegible] الحلول المشتركة للمعادلتين

ح = ٠ و ى = ٠ ونبين بعد ذلك [illegible] المعادلتين ح = ٠ و [illegible]

مشتركة حلول المعادلات (٢) فإذا قسمنا طرفي الأولى من المعادلة الأولى

من المعادلات (١) على م [illegible]

(٣) .... $\frac{ه}{م}$ ح = $\frac{ك}{م}$ ى + $\frac{ك}{م}$ ن

وحيث أن $\frac{ك}{م}$ عدد صحيح لأن هـ و ى قابلان للقسمة على م

فيكون ك ى قابلاً للقسمة على م وحيث أن ح بالفرض

أولي مع م فيكون م قاسماً للخارج ك

ويؤخذ من المعادلة (٣) أن مقادير س و ص المحققة للمعادلتين

ى = ٠ و $\frac{ك}{م}$ = ٠ يترتب عليهما انعدام $\frac{ه}{م}$ ح وحيث أن

$\frac{ه}{م}$ و $\frac{ك}{م}$ أوليان معاً تكون هذه المقادير محققة للمعادلة

ح = ٠ وبناء على ذلك تكون جميع حلول المعادلتين ى = ٠ و $\frac{ك}{م}$ = ٠

محققة للمعادلتين ح = ٠ و ى = ٠

والتحصيل

$$\frac{هـ\,هـ_١\,هـ_٢}{م\,م_١\,م_٢}\,جـ_١ = ج\,ب_١ + ج_٢\,ب_٢\,\frac{ك_٢}{م_٢} \quad \ldots\ldots (٦)$$

فاذا ضربت المعادلة (٥) فى $هـ_٢$ واستعوض $هـ\,ر$ بالطرف الثانى

من المعادلة الثالثة من المعادلات (١) فانها تؤول الى

$$\frac{هـ\,هـ_٢}{م\,م_١}\,ي_١ = ب_١\left(ح_١\,ك_٢ + ح_٢\,هـ_٢\,\frac{ك_١}{م_١}\right) + ح_١\,ب_٢\,ك_٢$$

وبمثل ما تقدم يبرهن على ان المكرر $ب_١$ يكون قابلاً للقسمة

على $م_٢$ وحينئذ اذا جعل $ح_٢$ رمزاً لخارج القسمة حدث

$$\frac{هـ\,هـ_١\,هـ_٢}{م\,م_١\,م_٢}\,ي_١ = ح_٢\,ب_١ + ح_١\,ب_٢\,\frac{ك_٢}{م_٢} \quad \ldots\ldots (٧)$$

ويؤخذ من المعادلتين (٦) و (٧) ان جميع المقادير المفروضة

للتغيير من س و ص التى تؤول بها الكميتان الكبيرتا الحدود

$ب_١$ و $\frac{ك_٢}{م_٢}$ الى الصفر يترتب عليها ايضاً انعدام الطرفين الاولين

من هاتين المعادلتين وحيث ان $\frac{هـ\,هـ_١\,هـ_٢}{م\,م_١\,م_٢}$ و $\frac{ك_٢}{م_٢}$ اوليات

معاً فتكون جميع حلول المعادلتين $ب_١ = ٠$ و $\frac{ك_٢}{م_٢} = ٠$ محققة

للمعادلتين $جـ_١ = ٠$ و $ي_١ = ٠$ المفروضتين

فأما المعادلة التى يحدث منها ارتباط بين $جـ_١$ و $ي_١$ و $\frac{ك_٢}{م_٢}$

فانها تحصل من ضرب المعادلة (٦) فى $هـ_٢$ واستعواض $هـ\,جـ_٢$

بالطرف الثانى من المعادلة الرابعة من المعادلات (١) وبهذه

$\frac{ه}{م} = ح\ ن\ \ \frac{ه\ ك}{م\ م_1} = ح$ فيكون

(٥) ...... $\frac{ه\ ه}{م\ م_1}\ ي_1 = ح\ د + ح\ ب_1\ \frac{ك_1}{م_1}$

ويؤخذ من المعادلتين (٤) و (٥) ان المقادير المفروضة للمتغيرين

س و ص اللذين تؤول بهما الكميات الكثيرات الحدود $د\ و\ \frac{ك_1}{م_1}$

الى الصفر يترتب عليها ايضاً انعدام $\frac{ه\ ه}{م\ م_1}\ ح\ ن\ \frac{ه\ ه}{م\ م_1}\ ي_1$

وحيث أن $\frac{ه\ ه}{م\ م_1}$ و $\frac{ك_1}{م_1}$ أوليان معاً فتكون جميع حلول

المعادلتين $د = ٠$ و $\frac{ك_1}{م_1} = ٠$ محققة للمعادلتين

$ح = ٠$ و $ي_1 = ٠$ المفروضتين

ولتحصيل ارتباط بين ح و ب و $\frac{ك_2}{م_2}$ نضرب المعادلة

(٤) في ح ويستعوض $ح_1$ بالطرف الثاني من المعادلة الثالثة

من المعادلات (١) فيحدث

$\frac{ه\ ه\ ه}{م\ م_1}\ ح = ب\ (ح\ ك + ح\ ه\ \frac{ك_1}{م_1}) + ح\ ي\ ب\ ي$

وحيث أن م يقسم بالفرض الطرف الأول من هذه المعادلة

كانه يقسم ايضاً ب فيكون قاسماً للكمية $ب\ (ح\ ك + ح\ ه\ \frac{ك_1}{م_1})$

وحيث أن ب و م أوليان معاً فيكون م قاسماً للمضروب

فيه ب وحينئذ اذا جعل ح رمز الخارج القسمة حدث

اولياً انمعا فتكون جميع حلول المعادلتين ـ = ٠ و ك²/م² = ٠

محققة للمعادلتين الاخريين وهما ح = ٠ و ر = ٠

وحيث انه لم يبق لينا الا ان نبرهن على ان اى مقادير محققة للمعادلتين

ج = ٠ و ـ = ٠ تكون جميعها المقادير المحققة للمعادلات (١) فنقول

انه يلزم لتكوين المعادلات التي يؤخذ منها هذا الاثبات ان نضع

فى المعادلة (٣) ح بدل ه/م و ع بدل ك/م فيحدث بعد

تحويل ع ـ من طرفيه الى الطرف الآخر

(١٠) .... ح ج − ع ـ = ر ك/م

فاذا اريد الآن حذف ر من المعادلتين (٤) و (٥) فانه يتوصل

الى ذلك بواسطة طرح احديها بين المعادلتين من الاخرى بعد

ان نضرب المعادلة الاولى فى ج والثانية فى ع وذلك بملاحظة

مقادير ج و ع وقد تكون العملية مختصرة اذا ضربت المعادلة

(٤) فى ـ والمعادلة (٥) فى ج لانه يتحصل حينئذ عند طرح

احدى المعادلتين الناتجتين من الاخرى

(ع ـ − ح ج) ر + (ع ـ − ح ج) ـ ك²/م² = ٠ وبوضع − ر ك/م

بدل ع ـ − ح ج وحذف المضروب ر يحدث

المثابة يكون $\frac{ه_١ ه_٢ ه_٣}{م_١ م_٢ م_٣}$ م = ب (ع $\frac{ك}{٣}$ + ه‍ ع $\frac{دك}{دم_٢}$) + ع ٣ ب فاذا قسم طرفا هذه المعادلة على م٢ وجعل ع رمزاً لخارج قسمة الكمية الكبيرة الحدود التامة ع ك٣ + ه‍ ع $\frac{دك}{دم_٢}$ على م٢ حدث

$$\frac{ه_١ ه_٢ ه_٣}{م_١ م_٢ م_٣ م_٢} م = ع ب + ع \frac{دك}{دم_٢} \quad \ldots\ldots (٨)$$

ولتحصيل ارتباط بين أ و ب و $\frac{دك}{دم_٢}$ نضرب المعادلة (٧) في ه‍٣ ويستعوض ه‍ ب بالطرف الثاني من المعادلة الرابعة من المعادلات (١) فيحدث من ذلك

$$\frac{ه_١ ه_٢ ه_٣}{م_١ م_٢ م_٣} أ = ب (ع ك + ه‍ ع \frac{دك}{دم_٢}) + ع ٣ ب$$

وبقسمة طرفي هذه المعادلة على م٢ وجعل ع رمزاً لخارج قسمة الكمية الكبيرة الحدود التامة ع ك + ه‍ ع $\frac{دك}{دم_٢}$ على م٢ يحدث

$$\frac{ه_١ ه_٢ ه_٣}{م_١ م_٢ م_٣ م_٢} أ = ع ب + ع \frac{دك}{دم_٢} \quad \ldots\ldots (٩)$$

ويؤخذ من المعادلتين (٨) و (٩) ان جميع المقادير المفروضة للمتغيرين س و ص التي تؤول بها الكميات الكبيرتا الحدود ب و $\frac{دك}{دم_٢}$ الى الصفر يترتب عليها ايضاً انعدام الطرفين الأولين من هاتين المعادلتين وحيث ان $\frac{ه_١ ه_٢ ه_٣}{م_١ م_٢ م_٣ م_٢}$ و $\frac{دك}{دم_٢}$

المضبوطة للمعادلتين ر١ = ٠ و ر١ = ٠ يقال
اذا كان المقدار ص = ى جذرًا للمعادلة ر/م = ٠ كان المقدارين
س = ل و ص = ى محققين للمعادلتين ر١ = ٠ و ر/م = ٠
وان كان المقدار ص = ى لا يحقق المعادلة ر/م = ٠ وكان
جذرًا للمعادلة ر١/م١ = ٠ عُلِم من المعادلة (١٠) ان المعادلة
ر = ٠ تحقق بالمقدارين س = ل و ص = ى وبناءً على ذلك
يكون هذان المقداران محققين للمعادلتين ر = ٠ و ر١/م١ = ٠
وان كان المقدار ص = ى لا يحقق واحدة من المعادلتين ر/م =
٠ و ر١/م١ = ٠ وكان جذرًا للمعادلة ر٢/م٢ = ٠ عُلِم من المعادلة
(١١) ان المعادلة ر١ = ٠ تحقق بالمقدارين س = ل و ص = ى
وبناءً على ذلك يكون هذان المقداران محققين للمعادلتين ر١ = ٠ و ر٢/م٢
وان كان المقدار ص = ى لا يحقق واحدة من المعادلات الثلاث
ر/م = ٠ و ر١/م١ = ٠ و ر٢/م٢ = ٠ وكان جذرًا للمعادلة ر٣/م٣ = ٠
عُلِم من المعادلة (١٢) ان المعادلة ر٢ = ٠ تحقق بالمقدارين
س = ل و ص = ى وبناءً على ذلك يكون هذان المقداران محققين
للمعادلتين ر٢ = ٠ و ر٣/م٣ = ٠

$$(١١) \ldots\ldots ج_1 ج - ع_1 د = - ر_1 \frac{ر ر_1}{م م_1}$$

واذا اريد حذف $ر_1$ من المعادلتين (٦) و (٧) نضرب المعادلة (٦) فى $د_1$ والمعادلة (٧) فى $ج_1$ ثم نطرح احدى المعادلتين الناتجتين من الاخرى فيحدث

$$(ع_1 د - ج_2 ج_1) ر_1 + (ع_1 د_1 - ج_1 ج) ر_2 \frac{ر_2}{م_2} = ٠$$

وبوضع $ر_1 \frac{ر ر_1}{م م_1}$ بدل $ع_1 د_1 - ج_1 ج$ وحذف المضروب $ر_1$ يحدث

$$(١٢) \ldots\ldots\ldots\ldots ج_2 ج_1 - ع_1 د_1 = ر_2 \frac{ر ر_1 ر_2}{م م_1 م_2}$$

وبهذه المثابة تحصل المعادلة

$$(١٣) \ldots\ldots\ldots\ldots ج_3 ج_1 - ع_1 د_1 = - \frac{ر ر_1 ر_2 ر_3}{م م_1 م_2 م_3}$$

ويؤخذ من المعادلة (١٣) هذه أن أى مقادير مفروضة للمتغيرين س و ص ومحققة للمعادلتين $ج_1 = ٠$ و $د_1 = ٠$ تكون محققة ايضا للمعادلة $\frac{ر ر_1 ر_2 ر_3}{م م_1 م_2 م_3} = ٠$ وهذا يقتضى أن أحد المضاريب $\frac{ر}{م}$ و $\frac{ر_1}{م_1}$ و الخ يكون معدوما ومن هنا يعلم أن مقادير المتغير ص تؤخذ من المعادلات

$$\frac{ر}{م} = ٠ \quad و \quad \frac{ر_1}{م_1} = ٠ \quad و \quad \frac{ر_2}{م_2} = ٠ \quad و \quad \frac{ر_3}{م_3} = ٠$$

اذا تقرر هذا وفرض أن $س = ل$ و $ص = ى$ كناية عن المقادير المضبوطة

وحيث انه لم يحصل تصليح في المقاسيم ولم يحذف من البواقي مضروب ما فتحصل جميع حلول المعادلتين المفروضتين بواسطة المعادلتين

$$س + ٢ص = ٠ \quad و \quad ص^{٢} - ص = ٠$$

اللتين تؤخذ منهما المقادير الأربعة

$$ص = ٠ \quad و \quad س = ٠ \quad و \quad ص = ١ \quad و \quad س = -٢$$

وحينئذ تكون المعادلة $ص^{٢} - ص = ٠$ هي المعادلة الانتهائية بالنسبة الى ص

المثال الثاني

$$س^{٣} + ٢ص\,س^{٢} + ٢ص(ص - ٢)\,س + ص^{٢} - ٤ = ٠ \quad و$$

$$س^{٢} + ٢ص\,س + ٢ص^{٢} - ٥ص + ٢ = ٠$$

وأما القسمة الاولى فانه يؤخذ منها الباقي $(ص - ٢)\,س + ص^{٢} - ٤$ أو $(ص - ٢)(س + ص + ٢)$ ثم يحذف المضروب $ص - ٢$ ويقسم الطرف الاول من المعادلة الثانية على $س + ص + ٢$ فيكون الباقي وهو $ص^{٢} - ٥ص + ٦$ غير محتوٍ على المتغير س وحينئذ تحصل جميع حلول المعادلات المفروضة بواسطة حل المعادلات

$$ص - ٢ = ٠ \quad و \quad س^{٢} + ٢ص\,س + ٢ص^{٢} - ٥ص + ٢ = ٠ \quad و \quad ..... (١)$$

وحينئذ تكون جميع المقادير المحققة للمعادلتين ج = ٠ و ح = ٠ من جملة المقادير المحققة للمعادلات (٢)

ويطلق على المعادلة $\frac{ر\,ر_١\,ر_٢\,ر_٣}{م\,م_١\,م_٢\,م_٣} = ٠$ التي تحصل منها جميع مقادير ص اسم المعادلة الانهائية بالنسبة الى ص

ولنوضح ذلك بمثالين فنقول

المثال الاول

$$س^٣ + ٢ ص س^٢ + (٢ ص^٢ - ص + ١) س + ص^٣ - ص^٢ + ٢ ص = ٠ \quad و$$

$$س^٢ + ٢ ص س + ص^٢ - ص = ٠$$

القسمة الاولى

$$
\begin{array}{r|l}
س^٣ + ٢ ص س^٢ + (٢ ص^٢ - ص + ١) س + ص^٣ - ص^٢ + ٢ ص & س^٢ + ٢ ص س + ص^٢ - ص \\
- س^٣ + ٢ ص س^٢ - (ص^٢ - ص) س & \overline{س + ص} \\
\hline
ص س^٢ + (٢ ص^٢ + ١) س + ص^٣ - ص^٢ + ٢ ص & \\
- ص س^٢ - ٢ ص^٢ س - ص^٣ + ص^٢ & \\
\hline
س + ٢ ص &
\end{array}
$$

القسمة الثانية

$$
\begin{array}{r|l}
س^٢ + ٢ ص س + ص^٢ - ص & س + ٢ ص \\
- س^٢ - ٢ ص س & \overline{س} \\
\hline
ص^٢ - ص &
\end{array}
$$

وحيث

ثم ان نجعل ص = س − ح فيكون

ووضع ح + ص بدل س في المعادلة د(س) = ٠ نحو

$$\text{د}(\text{ح} + \text{ص}) = ٠$$

او انه يحصل بمقتضى عملية التحليل (كما في ٢٢٥)

$$(٢) \ldots \quad \text{د}(\text{ح}) + \text{دَ}(\text{ح})\,\text{ص} + \text{دً}(\text{ح}) \frac{\text{ص}^{٢}}{١ \times ٢} + \text{دٌ}(\text{ح}) \frac{\text{ص}^{٣}}{١ \times ٢ \times ٣} + \text{الخ} = ٠$$

وحيث ان جـ بالفرض جذر للمعادلة (١) فتكون د(ح) معدومة وبناء على ذلك تكون المعادلة (٢) قابلة للقسمة على ص ويكون لها جذر معدوم وهذا الجذر المعدوم حادث من الفاصل ح − ح لانه بمقتضى الارتباط ص = س − ح يشاهد ان مقادير ص هي الفروق بين الجذر ح وسائر جذور المعادلة (١) بما فيها من الجذر ح وبحذف هذا الجذر المعدوم تؤول المعادلة الى

$$\text{دَ}(\text{ح}) + \text{دً}(\text{ح}) \frac{\text{ص}}{١ \times ٢} + \text{دٌ}(\text{ح}) \frac{\text{ص}^{٢}}{١ \times ٢ \times ٣} + \text{الخ} = ٠$$

وحينئذ تكون جذور هذه المعادلة هي الفروق بين الجذر ح والجذ[ور]
م − ١ للمعادلة المفروضة

فاذا وضع في المعادلة المذكورة ز بدل جـ تحصلت من ذلك معادلة تكون جذورها هي جميع الفروق بين الجذر ز وجذو[ر]

(٤) .... ص² − ٥ ص + ٦ = ٠ و س + ص + ٢ = ٠

فأما المعادلات (١) فتؤخذ منها المقادير ص = ٢ و س = ٠ و ص = ٢ و س = −٤ وأما المعادلات (٤) فتحصل منها المقادير ص = ٢ و س = −٤ و ص = ٣ و س = −٥

وأما المعادلة الانتهائية بالنسبة الى ص فانها تحصل من ضرب اطراف المعادلتين ص − ٢ = ٠ و ص² − ٥ ص + ٦ = ٠ في بعضها

في المعادلات التفاضلية

بند قد تقدم (في بند ٢٨٩) انه يمكن اجراء عملية استخراج الجذور غير المنطقة لمعادلة رقمية وذلك بان تجري العمل في مبداء الامر على معادلة اخرى تكون جذورها هي الفروق بين جذور المعادلة المفروضة مأخوذة مثنى ولنتصدى الآن لبيان كيفية تكوين هذه المعادلة فنرمز الى المعادلة المفروضة بالرمز

(١) .... د (س) = ٠

ونجعل ا و ب و حـ و ... و ل رموز الجذورها الميمية فاذا فرض في مبداء الامر انه اريد تحصيل معادلة تكون جذورها هي الفروق بين الجذر ا وبجذور اخرى عددها م − ١

وبناء على ذلك يكون كل اثنين من جذورها متساويين ومختلفين في العلامة

فاذا فرض أن م (م-١) = ٢ع وكانت المعادلة متناسبة موضوعة بالصورة

$$ص^{٢ع} + ا_١ ص^{٢ع-٢} + ا_٢ ص^{٢ع-٤} + \ldots\ldots + ا_ع = ٠$$

امكن جعل $ص^٢ = ى$ وحينئذ يحدث

$$ى^{ع} + ا_١ ى^{ع-١} + ا_٢ ى^{ع-٢} + \ldots\ldots + ا_ع = ٠$$

وحيث ان جذور هذه المعادلة هي مربعات فروق جذور المعادلة المفروضة فيطلق عليها بهذا السبب اسم معادلة مربعات التفاضل بند ٢١٣ وتستعمل المعادلة التفاضلية (كما في بند ٨٥) في تحصيل كمية دون اصغر فرق بين جذور معادلة مفروضة ولذا يبحث عن النهاية الصغرى للجذور الموجبة للمعادلة التفاضلية وهذه النهاية هي الكمية المطلوبة

ويمكن ايضا ان يبحث عن النهاية الصغرى لجذور معادلة مربعات التفاضل ولتكن الجذر الذي يعطي هذه النهاية هو الكمية الصغيرة المطلوبة وبهذه المثابة تحصل ثانيا النهاية الكبرى

م-١ للمعادلة المفروضة واذا وضع فيها هـ بدل ز حدثت من
ذلك معادلة تكون جذورها هي جميع الفروق بين الجذر هـ
والجذور م-١ للمعادلة المفروضة وهلم جرا
ومن هنا يؤخذ ان جذور المعادلة المفروضة الموفقة مثنى هي
مقادير ص الحادثة من وضع كل من هذه الجذور بدل س
في المعادلة

$$(٣)\ د(ص) + د'(س)\frac{ص}{١×٢} + د''(س)\frac{ص^٢}{١×٢×٣} + ... + ص^{م-١} = ٠$$

وهذا راجع الى حل كلتا المعادلتين (١) و (٣)
وبناء على ذلك اذا حذف س من المعادلتين (١) و (٣) كانت
المعادلة الانتهائية بالنسبة الى ص هي المعادلة المطلوبة
$\frac{م(م-١)}{٢}$ وحيث ان المعادلة المفروضة بدرجة م فتكون المعادلة
التفاضلية بدرجة م (م-١) لان عدد جذورها يساوي
عدد التراتيب التي يمكن تكوينها من الحروف ح و ز و هـ الملحوظة
مثنى التي عددها م
والمعادلة التفاضلية لا تحتوي الا على قوى زوجية للمجهول
لانها تحتوي في آن واحد بكل من الجذرين ح - ز و ز - ح

فإذا كانت [illegible] معادلة مربعات التفاضلات

جذور حقيقية موجبة [illegible] تكون تامة وغير محتوية على

مداومات (ويعرف ان المعادلة المفروضة لا تكون لها جذور

متساوية حتى لا يكون لمعادلة التفاضلية جذور معدومة)

وإذا كانت معادلة مربعات التفاضلات تامة وكانت محتوية

على متغايرات فقط كانت جذور المعادلة المفروضة كلها حقيقية

لانه اذا كان لها جذران تخيليان كالجذرين $س + ص\sqrt{-1}$ و

$س - ص\sqrt{-1}$ كان مربع تفاضل هذين المقدارين $-4ص^2$ وحينئذ

يؤخذ من ذلك ان معادلة مربعات التفاضلات يكون لها جذر

سالب وحيث انها تامة فتكون محتوية على مداومة وهذا مخالف

للغرض فاذا اجرينا الطريقة المتقدمة (في [illegible]) على المعادلة

العمومية ذات الدرجة الثالثة

$$س^3 + ع س + ك = 0$$

نجد ان معادلة مربعات التفاضلات هي

$$ى^3 + 6ع ى^2 + 9ع^2 ى + 4ع^3 + 27ك^2 = 0$$

ومن هنا يؤخذ ان الشرطين الضروريين الكافيين لجعل جذور

حيث يؤثر شرطي غيرها في العمل

فإذا حصلت بحذف ص من المعادلتين (١) و(٢) عدة معادلات
جزئية محتوية على س وكانت جذور كل واحدة من
هذه المعادلات من مقادير س فإنه يجوز من ذلك كمية
تكون اقل من أصغر فرق بين جذور المعادلة المفروضة وذلك بأن
يبحث عن النهايات الصغرى بين جذور كل معادلة جزئية وحيث
انه لابد من اقتران كل فرق في كلتا المعادلتين بالعلامتين + و −
فيعلم منه ان تكون النهاية الصغرى للمقادير الموجبة المفروضة المتغير
س أو النهاية الصغرى للمقادير السالبة هي الكمية التي نريد تحصيلها
وإذا لم تجر العمليات الضرورية لجعل المعادلات المحتوية على
س غير مشتملة على جذور أخرى فإنه يمكن دائما استعمال هذه
المعادلات في تعيين الكمية المطلوبة غير انه يقتضي البحث عن
نهاية تكون أصغر من النهاية التي يمكن تحصيلها عند ما تكون
المعادلات المحتوية على س غير مشتملة على جذور أخرى

بند ٢١٤ ومعادلة مربعات التفاضلات يعلم منها هل المعادلة [illegible]
جذور تخيلية أم لا

عن الكميتين المشتملتين على المكررين المجهولين س ، ك ويلزم لكي تكون الكمية ذات الحدود الثلاثة $س^٢ + ج س + ك$ من قواسم الطرف الاول من المعادلة المفروضة ان يكون الباقي $ج_١ س + ك_١$ معدوما وحيث أن س غير معين فيكون $ج_١ = ٠$ و $ك_١ = ٠$ وحينئذ تعلم من المعادلتين المتحصلة لكل من ج ، ك بواسطة هاتين المعادلتين جميع القواسم ذات الدرجة الثانية للمعادلة المفروضة .

وحيث ان عدد القواسم ذات الدرجة الثانية $\frac{١}{٢}$ م (م-١) (كما في سند ٢٤٤) فاذا حذف ج أو ك من المعادلتين $ج_١ = ٠$ و $ك_١ = ٠$ كانت المعادلة الانتهائية من المعادلات ذات الدرجة $\frac{١}{٢}$ م (م-١) وحيث ان هذا العدد اكبر من م فان زاد م عن ٣ كان تعيين القواسم ذات الدرجة الثانية اصعب من المعادلة المفروضة

سند ٢١٦ ويمكن استعمال البحث عن القواسم ذات الدرجة الثانية في تعيين الجذور التخيلية لاي معادلة ولذا يكفي انه يعين كل من المقدارين الحقيقيين لكل من ج ، ك المحققين للمعادلتين $ج_١ = ٠$ و $ك_١ = ٠$ فنتحصل من ذلك جميع القواسم الحقيقية

المعادلة المفروضة حقيقية هما ع < ٠ ، $٤ ع^{٣} + ٢٧ ك^{٣} > ٠$ وهذا موافق لما ذكر (في بند ٢٨٨)

الباب الثاني عشر

في القواسم ذات الدرجة الثانية وتنقيص درجة المعادلات والمعادلات العكسية والمعادلات ذات الحدين والمعادلات ذات الحدود الثلاثة والمعادلات المحتوية على المجهول تحت علامة الجذر

في القواسم ذات الدرجة الثانية

بند ٤٢٥ لنفرض المعادلة

$$س^{م} + ج س^{م-١} + ب س^{م-٢} + هـ س^{م-٣} + \ldots\ldots = ٠$$

فاذا اريد تحصيل القواسم ذات الدرجة الثانية للطرف الاول من هذه المعادلة فانه يرمز لواحد من هذه القواسم بالكمية ذات الحدود الثلاثة

$$س^{٢} + ع س + ك$$

لانه اذا اجريت عملية قسمة الطرف الأول من المعادلة على $س^{٢} + ع س + ك$ تحصل من ذلك باقٍ بدرجة اولى محتوٍ على س وهذا الباقي يرمز له بالكمية ع س + ك (بجعل ع و ك كاسة

فيها ح بدل ع فتكون مقادير ع بجذور المعادلة المفروضة
ولمزيد ايضاح ذلك نجعل ل ، ى ، ك رموز الجذور المعادلة
(١) فتكون العوامل المطلوبة هى

(س - ل) (س - ى) و (س - ل) (س - ك) و (س - ى) (س - ك)

وحينئذ تكون مقادير ع هى

- (ل + ى) و - (ل + ك) و - (ى + ك)

وحيث أن المعادلة المفروضة مجردة عن الحد الثانى فيكون

ل + ى + ك = ٠

ومن هنا ينتج

- (ل + ى) = ك و - (ل + ك) = ى و - (ى + ك) = ل

بند ٢١٨ ثم نفرض ايضاً المعادلة

(٢) ...... س٤ + ح س٢ + ى س + ﻫ = ٠

التى اذا قسم طرفها الأول على س٢ + ع س + ك نحصل الباقى

(ى - ح ع + ٢ ع ك - ع٣) س + ﻫ - ح ع + ك٢ - ع٢ ك

وحينئذ يلزم وضع المعادلتين

(٤) ع٣ - ٢ ع ك + ح ع - ى = ٠ و (٥) ك٢ - (ح + ع٢) ك + ﻫ = ٠

ذات الدرجة الثانية للمعادلة المفروضة وبجعل كل من هذه
الحواسم مساويًا للصفر تتعين الجذور التخيلية لهذه المعادلة
فانوجد لكل من ع و ك مقداران منطقان محققان للمعادلتين
ع = ٠ و ك = ٠ سهل تعيينها ومن هنا تعلم جميع الحواسم المنطقة
ذات الدرجة الثانية للمعادلة المفروضة وحينئذ يؤول حل هذه
المعادلة الى حل معادلة دونها فى الدرجة و الى حل جملة معادلات
بدرجة ثانية

٢١٧ ولنمثل للطريقة المذكورة بأمثلة فنفرض فى مبداء الامر المعادلة

$$س^٣ + ح س + ء = ٠ \quad \ldots\ldots (١)$$

التى اذا قسم طرفها الأول على $س^٢ + ع س + ك$ تحصل من ذلك
الباقى $(ع^٢ - ك + ح) س + ع ك + ء$

وحينئذ يلزم وضع المعادلتين

$$ع^٢ - ك + ح = ٠ \text{ و } ع ك + ء = ٠$$

اللتين اذا حذف منهما ك حدثت هذه المعادلة

$$ع^٣ + ح ع + ء = ٠ \quad \ldots\ldots\ldots (٢)$$

وحيث ان هذه المعادلة لا تختلف عن المعادلة (١) الا بكونه قد وضع
فيها

المالوفة [illegible] ثبوت الناقصة بمجهول

(كمع ف ٥،٤٩) [illegible] المجهول

ولذا اذا وصل الى الجذور [illegible] المعادلة [illegible] بالوصول

لو [illegible] ذلك [illegible]

ـ = ([illegible]) [illegible] + [illegible]

ب = ([illegible] + ح)

[illegible] يحذف الحد الثالث [illegible]

[illegible] الجميع [illegible] جميع هذه

الجذور [illegible] بعاد [illegible]

وحيث [illegible] اخيف

الى كل من المعادلات [illegible]

المعادلة من جميع [illegible]

وحيث ان [illegible] الاخير من المعادلة [illegible] ب [illegible] كون [illegible] هذه ٢١٩

المعادلة جذران حقيقيان احدهما موجب والآخر سالب [illegible]

وحينئذ يحصل بالنسبة لكل مقدار حقيقي [illegible] المجهول

مقدار حقيقي للمجهول [illegible] وبناء على ذلك تحقق هذه النظرية [illegible]

اللتين يحصل من احداهما

(٦) .... $ك = \frac{ع^{٣} + ح ع - د}{٢ ع}$

وبوضع هذا المقدار في المعادلة الاخرى يحدث

(٧) .... $ع^{٦} + ٢ ح ع^{٤} + (ح^{٢} - ٤ هـ) ع^{٢} - د^{٢} = ٠$

وهذه المعادلة بدرجة سادسة لكن حيث انها لاتحتوي الاعلى قوى زوجية للمجهول ع فتؤول الى معادلة بدرجة ثالثة بفرض $ع^{٢} = ن$ ويسهل ادراك هذا التحويل لان مقادير ع الستة يتكون من مجموع كل اثنين منها أربعة جذور للمعادلة المفروضة وحيث أن مجموع هذه الجذور معدوم فيكون مجموع كل اثنين منها مساويًا لمجموع الاثنين الآخرين ومخالفًا معه في العلامة وحينئذ لاتكون المعادلة التي يتعين بها ع مشتملة الا على قوى زوجية للمجهول

فاذا اجريت مثل هذه العملية على المعادلة التامة

$$س^{٤} + ح س^{٣} + د س^{٢} + هـ س + و = ٠$$

فانه يحصل من ذلك لتعيين ع معادلة بدرجة سادسة تكون تامة ايضًا لكنه يبرهن بالسهولة على انه اذا حذف الحد الثاني

مفاد أن [illegible]

إذا كان [illegible]

[illegible]

ويحصل [illegible]

المجهول ح

في الحل الجبري للمعادلة [illegible] الثالثة

بند ٣٥٠ أي معادلة بدرجة ثالثة وبمجهول واحد تخلو [illegible] عن القوة الثالثة للمجهول [illegible] المجهول [illegible] أنه يمكن دائمًا [illegible] لا تكون محتوية على قوة للمجهول الذي يكون دون [illegible] إن هذا التحويل [illegible] في المعادلة ذات الدرجة الثالثة توضع بالصورة

(١) $س^٣ + ٣ ع س + ٢ ك = ٠$

ثم إنه يفرض أن ع و ك كميتان [illegible]

$س = ص + ن$

أي معادلة حقيقية المكررات تكون مشتملة دائماً على مضاريب حقيقية بدرجة ثانية في المعادلة ذات الدرجة الرابعة وذلك بقطع النظر عن النظريات العمومية التي سبق اثباتها في هذا الموضوع

فاذا كان $\text{ء} = 0$ آلت المعادلة (٤) الى

$$\text{ع}^3 - 2\,\text{ع}\,\text{ك} + \text{ح}\,\text{ع} = 0$$

وحينئذٍ تتحقق كلتا المعادلتين (٤) و (٥) إمّا بوضع

$$\text{ع} = 0 \;,\; \text{ك}^2 - (\text{ح} + \text{ع}^2)\,\text{ك} + \text{ه} = 0$$

أو بوضع

$$\text{ع}^2 - 2\,\text{ك} + \text{ح} = 0 \;\text{و}\; \text{ك}^2 - (\text{ح} + \text{ع}^2)\,\text{ك} + \text{ه} = 0$$

فأما المعادلتان الأوليان فيؤخذ منهما أن

$$\text{ك} = \tfrac{1}{2}\,\text{ح} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\,\text{ح}^2 - \text{ه}}$$

وأما المعادلتان الأخريان فيؤخذ من احداهما

$$\text{ك} = \frac{\text{ح} + \text{ع}^2}{2}$$

وبوضع هذا المقدار في المعادلة الاخرى يحدث

$$\text{ع}^4 + 2\,\text{ح}\,\text{ع}^2 + \text{ح}^2 - 4\,\text{ه} = 0$$

فاذا كان $\text{ح}^2 - 4\,\text{ه} > 0$ تعيّن بالقانون $\text{ك} = \tfrac{1}{2}\,\text{ح} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\,\text{ح}^2 - \text{ه}}$ مقداران

للتعبير عن مجموع الجذرين مقادير متنوعة وهذه
المقادير ليست كلها محققة للمعادلة المفروضة لانه يلزم أن
مقادير ص و ز تكون محققة للمعادلتين ص ز = - ح
و ص^{3} + ز^{3} = - ٢ ك وحيث ان الاولى من هاتين المعادلتين
قد استعيضت بالمعادلة ص^{3} ز^{3} = - ح^{3} وكان لكل كمية ثلاثة
جذور تكعيبية فيكون للمعادلة ص^{3} ز^{3} = - ح^{3} بالنسبة لحاصل
الضرب ص ز ثلاثة مقادير متنوعة وحينئذ اذا رمز
لجذري الواحد التكعيبيين التخيليين بالرمزين ل و ل^{2} (كما
سيأتي في بند ٣٤٤) كانت مقادير ص ز الثلاثة المتطابقة
مع ص^{3} ز^{3} = - ح^{3} هي ص ز = - ح و ص ز = - ح ل
و ص ز = - ح ل^{2}

وبناء على ذلك تؤخذ من المعادلة (٢) جذور طمن المعادلة
(١) والمعادلتين الحادثتين من وضع ح ل أو ح ل^{2} بدل ح
وحيث أن ح كمية حقيقية فيلزم ان نقتصر في القانون
(٢) عن جميع توافيق مقادير الجذر التكعيبي التي يكون حاصل ضربها
تخيليا

امكن وضع المعادلة الناتجة بالصورة

$$ص^{٣} + ز^{٣} + ٣ (ص ز + ه)(ص + ز) + ٢ك = ٠$$

وهذه المعادلة تتحقق بوضع

$$ص ز + ه = ٠ \quad و \quad ص^{٣} + ز^{٣} + ٢ك = ٠$$

وهاتان المعادلتان تؤخذ منهما

$$ص^{٣} ز^{٣} = - ه^{٣} \quad و \quad ص^{٣} + ز^{٣} = - ٢ك$$

ومن هاتين المعادلتين ينتج أن $ص^{٣}$ و $ز^{٣}$ يكونان جذرين

للمعادلة $ط^{٢} + ٢ك ط - ه^{٣} = ٠$

وحينئذ يحصل

$$ص^{٣} = - ك + \sqrt{ك^{٢} + ه^{٣}} \quad و \quad ز^{٣} = - ك - \sqrt{ك^{٢} + ه^{٣}}$$

وحيث أن $س = ص + ز$ فيكون قانون مقادير س مبيناً

بالصورة

$$(٢) \ldots\ldots \quad س = \sqrt[٣]{- ك + \sqrt{ك^{٢} + ه^{٣}}} + \sqrt[٣]{- ك - \sqrt{ك^{٢} + ه^{٣}}}$$

فاذا قطع النظر عن المقادير الجبرية الموجودة تحت العلامات الجذرية فانه لا يحصل من المعادلة (٢) الا مقدار واحد للمتغير س الا انه لما كان للجذر التكعيبي ثلاثة مقادير يحصل

للمتغير

وحينئذ $\frac{\text{ك}}{٢} = -\frac{٩}{٢}$ فيكون $\sqrt{\text{ك}^٢ + \text{ع}^٣} = \frac{٧}{٢}$

ومن هنا نجد

$$\text{م} = \sqrt[٣]{-\text{ك} + \sqrt{\text{ك}^٢ + \text{ع}^٣}} = \sqrt[٣]{\frac{١٨}{٢}} = ٢ \quad \text{ن}$$

$$\text{ن} = \sqrt[٣]{-\text{ك} - \sqrt{\text{ك}^٢ + \text{ع}^٣}} = \sqrt[٣]{\frac{٢}{٢}} = ١$$

وحينئذ تكون الجذور الثلاثة هي

$$\text{س} = ٣ \quad \text{ن}$$

$$\text{س} = -١ + \sqrt{٣}\sqrt{-١} + \frac{١}{٢}(-١ - \sqrt{٣}\sqrt{-١}) = \frac{١}{٢}(-٣ + \sqrt{٣}\sqrt{-١}) \; \text{ن}$$

$$\text{س} = -١ - \sqrt{٣}\sqrt{-١} + \frac{١}{٢}(-١ + \sqrt{٣}\sqrt{-١}) = \frac{١}{٢}(-٣ - \sqrt{٣}\sqrt{-١})$$

ولا شك أن مقادير المتغير س الثلاثة هذه تحقق بها المعادلة المفروضة وان كانت الكمية ع سالبة كانت الكمية $\text{ك}^٢ + \text{ع}^٣$ سالبة وحينئذ تكون الجذور التكعيبية الداخلة في المعادلة (٢) غير محتوية على مقدار حقيقي لكنه لا يلزم ان يؤخذ من ذلك انه لا يكون للمعادلة المفروضة الاجذور تخيلية لانه قد تقدم ان الجذور تكون في هذه الحالة كلها حقيقية وينبغي لتخصيص هذه الجذور من المعادلة (٢) ان تجرد هذه المعادلة عن الجذور التخيلية وذلك لا يتأتى الا اذا تعين كل جذر تكعيبي بجملة عدد جذورها

فإن كانت الكمية $ك^{٢} + ق^{٣}$ موجبة كان لكل جذر تكعيبى مقدار حقيقى ولنرمز على وجه الاختصار للمقدار الحقيقى المفروض للجذر التكعيبى الأول بالرمز ج والمقدار الثانى بالرمز ء فتكون المقادير الثلاثة للجذر الأول هى ج و ل ج و $ل^{٢}$ ج والمقادير الثلاثة للجذر الثانى هى ء و ل ء و $ل^{٢}$ ء وحينئذ اذا ضربت بطريق التوالى الكميات الثلاث الأول فى الكميات الثلاث الأخر ولوحظ أولاً أن ل و $ل^{٢}$ مقداران تخيليان وثانياً أن $ل^{٣}$ = ١ و $ل^{٢}$ تخيلى لانه لما كان $ل^{٣}$ = ١ كان $ل^{٤}$ = ل شوهد انه لا يحصل غير ثلاثة حواصل حقيقية هى ج × ء و ل ج × $ل^{٢}$ ء و $ل^{٢}$ ج × ل ء ومن هنا يؤخذ انه لا يكون للمتغير س الا المقادير الثلاثة هذه

ج + ء و ل ج + $ل^{٢}$ ء و $ل^{٢}$ ج + ل ء

فأما المقدار الأول فهو حقيقى وأما المقداران الآخران فهما تخيليان وقد تقدم أن المعادلة لا يزيد عدد جذورها عن درجتها ولنمثل لذلك بالمعادلة

$$س^{٣} - ٦ س - ٩ = ٠$$

وحشان

وحينئذ يكون الجذر الحقيقى مبينا بصورة غير منطقة مع انه منطق

لأن المعادلة المفروضة تحقق بفرض س = ٤

ولكى يستنتج من القانون (٢) المقدار المضبوط لجذر وعند ما يكون

منطقا يلزم ان تجرى على كل من الجذور التكعيبية الداخلة فى المعادلة

عملية تحويل مشابهة للعملية التى اجريت على المقدار √(د + √ٯ) وهذا

التحويل له ارتباط بالبحث عن الجذر المنطق لمعادلة بدرجة ثالثة

فاذا كان ك٢ + ع٣ = ٠ كانت كل واحدة من الكميتين المبينتين

بالرمزين جـ و ب مساوية للمقدار الحقيقى المفروض للجذر ∛(−ك)

وحيث أن ل + لَ = −١ فيكون

ب ل + ب لَ = −∛ك و جـ لَ + جـ ل = −∛ك و جـ + ب = ٢∛ك

وحينئذ تكون الجذور الثلاثة للمعادلة حقيقية ويكون اثنان منها

متساويين

فى الحل العمومى للمعادلة ذات الدرجة الرابعة

٣٤٠ – بعد الاعمال التى سبقت (فى ١٨٢) توصل الى الحل العمومى لمعادلة

ذات الدرجة الرابعة

ولنفرض الآن المعادلة

غير محدود وهذا هو المعروف بالحالة غير المنطقة للمعادلة ذات الدرجة الثالثة

ولنمثل لهذه الحالة بالمعادلة

$$س^٣ - ٢١ س + ٢٠ = ٠$$

التي يحصل منها عند جعل ع = −٧ و ك = ١٠ في المعادلة (٢)

$$س = \sqrt[٣]{-١٠ + ٩\sqrt{-٣}} + \sqrt[٣]{-١٠ - ٩\sqrt{-٣}}$$

وبناء على ذلك يتحقق بالسهولة ان المعادلة المفروضة لها ثلاثة جذور حقيقية لانها تحقق اذا وضع فيها بدل المتغير س كل من الاعداد

١ و ٤ و −٥

وان كانت الكمية $ك^٢ + ع^٣$ موجبة كان القانون (٢) غير كاف أيضا لانه ربما تحصل منه للجذر الحقيقي مقدار محتو على علامات جذرية مع أن الجذر يكون منطقا

ولنمثل لذلك بالمعادلة

$$س^٣ - ٦ س - ٤٠ = ٠$$

التي يحصل منها عند جعل ع = −٢ و ك = −٢٠ في القانون (٢)

$$س = \sqrt[٣]{٢٠ + ١٤\sqrt{٢}} + \sqrt[٣]{٢٠ - ١٤\sqrt{٢}}$$

وحينئذ

وحيث أن جـ كناية عن واحد من الجذور الأربعة للمعادلة (١) فتؤخذ
هذه الجذور الأربعة من المعادلة (٣) ولما كانت المعادلة (٢)
لا تحتوى الا على مربع د لم تتغير اذا أخذت المعادلة
س^{٤} + جـ س^{٢} − د س + هـ = ٠ بدل المعادلة (١) وحينئذ تؤخذ
ايضاً الجذور الأربعة لهذه المعادلة من المعادلة (٣) لانه يثبت هنا
بالنسبة الى العلامتين ± الموضوعتين امام كل علامة جذرية ان
مقدار ل يتعين بثمانية أوجه ويلزم لاستخراج جذور
المعادلة س^{٤} + جـ س^{٢} − د س + هـ = ٠

ان يثبت على انه اذا ضربت الكميات الثلاث ل + ى و ل + لا و ل + ط
فى بعضها تحصل من ذلك حاصل ضرب يكون مركباً من مجموع حواصل
ضرب الجذور ل و ى و لا و ط ثلاث ثلاث ما عدا الكمية
ل^{٣} + ل^{٢} ى + ل^{٢} لا + ل^{٢} ط وحيث أن هذه الكمية معدومة
لكونها تؤول الى ل^{٢} (ل + ى + لا + ط) فيؤخذ من ذلك
ان الحاصل (ل + ى) (ل + لا) (ل + ط) يساوى مجموع حواصل
ضرب الجذور ل و ى و لا و ط ثلاث ثلاث وحيث أن هذا
المجموع يساوى − د فلابد من ادخال فى المعادلة (٣) غير توافيق

ش^{4} + حـ ش^{2} + ء ش + هـ = ٠ .... (١)

وجعل ع^{2} = ز في المعادلة (٧) المتقدمة (في ص ٥١٨) آلت هذه المعادلة ذات الدرجة الرابعة الى

ز^{3} + ٢ حـ ز^{2} + (حـ^{2} − ٤ هـ) ز − ء^{2} = ٠ .... (٢)

وحيث ان هذه المعادلة بدرجة ثالثة فيمكن تحصيل المقادير العومية لجذورها بالمثابة المتقدمة (في ص ٥٥٢) لانه اذا رمز الى هذه الجذور بالرموز ز′ ، ز″ ، ز‴ كانت مقادير ع هي ± $\sqrt{ز'}$ ، ± $\sqrt{ز''}$ ، ± $\sqrt{ز'''}$ لكنه يمكن ان تكون مقادير ع هذه مبينة بالجذور الأربعة للمعادلة (١) لانه اذا رمز الى هذه الجذور بالرموز ل و ک و لا و ط . ولوحظ ان مجموعها معدوم كانت مقادير ع الستة هي

± (ل + ک) ، ± (ل + لا) ، ± (ل + ط)

وحينئذ يكون

ل + ک = ± $\sqrt{ز'}$ ، ل + لا = ± $\sqrt{ز''}$ ، ل + ط = ± $\sqrt{ز'''}$

ومن هنا يوجد بملاحظة القانون ل + ک + لا + ط = ٠ أن

ل = ± $\sqrt{ز'}$ ± $\sqrt{ز''}$ ± $\sqrt{ز'''}$ .... (٣)

وحيث

ان تكون جميع جذور المعادلة (١) هذه حقيقية ما لم تكن الجذور الثلاثة للمعادلة (٢) موجبة لان جذور المعادلة (٢) هذه كناية عن مربعات حواصل جمع كل اثنين من جذور المعادلة (١) وحينئذ اذا كانت جميع جذور المعادلة (١) حقيقية كانت حواصل جمع كل اثنين من هذه الجذور حقيقية ايضا وبناء على ذلك تكون مربعات حواصل الجمع هذه موجبة.

فاذا كانت الجذور $ز'$ و $ز''$ و $ز'''$ موجبة كان حاصل الضرب $(+\sqrt{ز'})(+\sqrt{ز''})(+\sqrt{ز'''})$ موجبا وحينئذ لا تكون المقادير (٤) موافقة الا في الحالة التي يكون فيها ى موجبا فقط اما اذا كان ى سالبا فانه يلزم في هذه المقادير تغيير اشارة واحدة من العلامات الجذرية

واذا فرضنا الآن ان الجذرين $ز''$ و $ز'''$ موجبان فانه يمكن في هذه الحالة وضع $ر\sqrt{-1}$ و $ك\sqrt{-1}$ بدل علامتي الجذر $+\sqrt{ز''}$ و $+\sqrt{ز'''}$ وحيث ان ر و ك هنا كناية عن كميتين موجبتين تحول حاصل الضرب $(+\sqrt{ز'})(+\sqrt{ز''})(+\sqrt{ز'''})$ الى $-ر ك\sqrt{ز'}$

علامات العلامات الجذرية المحققة لهذا الشرط وهو ان حاصل ضرب هذه العلامات الجذرية يكون متحدا في العلامة مع ء فاذا فرضنا ان طرق تعيين الجذور الثلاثة المبينة بالمقادير $+\sqrt{z'}$ و $+\sqrt{z''}$ و $+\sqrt{z'''}$ مكيفة الوضع بحيث يكون حاصل ضربها متحدا في العلامة مع ء فتكون الجذور الاربعة للمعادلة المفروضة مبينة هكذا .

$$\text{(٤)}\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} +\sqrt{z'}+\sqrt{z''}-\sqrt{z'''} \\ +\sqrt{z'}-\sqrt{z''}+\sqrt{z'''} \\ -\sqrt{z'}+\sqrt{z''}+\sqrt{z'''} \\ -\sqrt{z'}-\sqrt{z''}-\sqrt{z'''} \end{array}\right.$$

يسند وبناء على ذلك يكون واحد من جذور المعادلة (٢) موجبا لان حدها الاخير سالب ويكون جذراها الآخران متحدين في العلامة لان حاصل ضرب الجذور الثلاثة موجب ويمكن ان يكون هذان الجذران تخيليين

ويؤخذ من المعادلة (٣) انه اذا كانت الجذور الثلاثة للمعادلة (٢) موجبة كانت جميع جذور المعادلة (١) حقيقية ولا يمكن

ان

متى [illegible] في [illegible] [illegible] + $\sqrt{\text{ن}}$ على وجه بحيث يكون

حيث [illegible] في [illegible] و [illegible] متشابة تكون الجذور الأربعة

مبينة هكذا

$$-\sqrt{\text{ن}} + \text{م} + \text{ح} - \text{م} - \text{ح} - \sqrt{\text{ن}} + \text{ح} + \sqrt{\text{ن}} + \text{ح} \sqrt{-1} + \sqrt{\text{ن}} - \text{ح} \sqrt{-1}$$

فأما الجذران الأولان فهما حقيقيان وأما الجذران الاخران فهما تخيليان

ومما ينبغي التنبيه عليه ان المعادلة (ن) هي المعروفة بآلة المعادلة (١)

في تنقيص درجة المعادلات

٣٤٣ بند فقد وجد فيما تقدم ان اى معادلة محتوية على جذ ور متساوية تنقسم الى عدة معادلات اخرى دونها في الدرجة ولذا يقال ان هذه المعادلة تكون قابلة لتنقيص درجتها ويمكن ايضا تنقيص درجة المعادلة [illegible] اذا كان بعض جذورها تحقق به شروط مخصوصة

٣٤٤ بند فاذا فرض انه يوجد بين ح و و اللذين هما من جذور المعادلة $\text{د}(\text{س}) = 0$ ارتباط مبين بالمعادلة

$$\text{ر} = \text{ك و} + \text{ح} \quad \ldots\ldots (١)$$

ولكي يكون هذا الحاصل متحدا في العلامة مع د يلزم أن يتعين + √ز'
على وجه بحيث يكون متخالفا في العلامة مع د وبهذه المثابة تكون
الجذور الأربعة مبينة هكذا

+ √ز' + (م − ك) √−١

+ √ز' − (م − ك) √−١

− √ز' + (م + ك) √−١

− √ز' − (م + ك) √−١

وهذه الجذور الأربعة تكون تخيلية ما لم تكن م = ك لأن المقدارين
الأولين يؤولان حينئذ إلى الكمية الحقيقية √ز'
وإذا فرض أن الجذرين ز'' و ز''' تخيليان كان

ز'' = م + ك √−١ و ز''' = م − ك √−١

وبناء على ذلك يمكن وضع مقداري √ز'' هكذا ± (م + ع √−١)
ومقداري √ز''' هكذا ± (م − ع √−١) (كما سيأتي في بند ٢٤٠)
وإذا أخذ بدل + √ز'' و + √ز''' المقداران
م + ع √−١ و م − ع √−١ حدث (+ √ز'') (+ √ز''') = م² + ع²
وحينئذ يلزم لكي يكون حاصل الضرب (+ √ز') (+ √ز'') (+ √ز''')
متحدا

أخذ هذا الجذر ايضاً من المعادلة م=٠ أعنى انه يلزم فى هذه الحالة ان يوضع ه فى الارتباط (١) فيكون الجذر الثانى هو الكمية ه بعينها لكنه لا ينبغى ان يستنبط من ذلك ان الجذر ه يدخل فى المعادلة د(س)=٠ مرتين لانه يكفى أن يكون هذا الجذر داخلاً فى هذه المعادلة مرة واحدة ليكون محققاً لكل من المعادلتين د$\left(\frac{ر-ع س}{ك}\right)$=٠ و م=٠ .

ويشاهد بالسهولة انه اذا دخل جذر عدة مرات فى المعادلة د(س)=٠ دخل ايضاً فى المعادلة م=٠ بقدر ما دخل فى المعادلة المذكورة لان جذور المعادلة د$\left(\frac{ر-ع س}{ك}\right)$=٠ هى مقادير س الحادثة من جعل $\frac{ر-ع س}{ك}$ مساوياً بالتوالى لكل من جذور المعادلة د(س)=٠ وحينئذ تكون الجذور المشتركة بين المعادلتين د$\left(\frac{ر-ع س}{ك}\right)$=٠ و د(س)=٠ أى جذور المعادلة م=٠ هى جذور المعادلة د(س)=٠ التى يكون المقدار $\frac{ر-ع س}{ك}$ مساوياً لكل واحد منها

تنبيه ومتى كانت ع=ك آل الارتباط (١) الى ه+و=$\frac{ر}{ع}$
وللاختصار يوضع $\frac{ر}{ع}$=ف وحيث أن الجذرين ه و ى

نبتدى بالبحث أن هـ و و من جذور المعادلة $د(س)=٠$ فيجب $د(هـ)=٠$ و $د(و)=٠$ واذا وضع في المعادلة $د(و)=٠$ مقدار و المستخرج من المعادلة (١) آلت الى $د\left(\frac{م-ع هـ}{ك}\right)=٠$ وحينئذ تكون الكمية هـ محققة لمعادلتين $د(س)=٠$ و $د\left(\frac{م-ع س}{ك}\right)=٠$ معًا وبناءً على ذلك يوجد للطرفين الأولين منهما بين المعادلتين قاسم مشترك اذا جعل مساويا للصفر تعين الجذر هـ

فاذا جعل م رمزا للقاسم المشترك الأعظم بين الكميتين الكثيرتي الحدود $د(س)$ و $د\left(\frac{م-ع س}{ك}\right)$ وفرض أن هـ احد مقادير س به تحقق المعادلة $م=٠$ كان هذا مقدار محققا للمعادلتين $د(س)=٠$ و $د\left(\frac{م-ع س}{ك}\right)=٠$ معًا وينتج أن $د\left(\frac{م-ع هـ}{ك}\right)$ معدوم فيكون $\frac{م-ع هـ}{ك}$ جذرا للمعادلة $د(س)=٠$ وحينئذ اذا جعل و رمزا لهذا الجذر كانت الكميتان هـ و و كناية عن جذري المعادلة $د(س)=٠$ المحققين للارتباط $ع هـ + ك و = م$

فاذا وجد للمعادلة $د(س)=٠$ جذر كالجذر هـ بحيث يكون $\frac{م-ع هـ}{ك}=هـ$ أو $ع هـ + ك هـ = م$

اعظم

المفروضة على سَ - سِ ف + ز تحصل من ذلك باق بدرجة
أولى هو ع س + ك وحيث أن ع و ك كميتان كثيرتا
الحدود لا تشتملان إلا على المجهول ز فلكي تكون القسمة
بلا باق يلزم أن يكون ع = ٠ و ك = ٠ وحينئذ يكون للكميتين
ع و ك قاسم مشترك إذا جعل مساوياً للصفر تعينت به مقادير
ز ثم إنه يكون من المعادلة سَ - سِ ف + ز = ٠ مقادير
للمتغير س يكون كل واحد منها مطابقاً للمقدار من مقادير ز

ويمكن أيضاً استعمال هذه الطريقة في حالة ما إذا كانت
بعض جذور المعادلة المفروضة محققة للارتباط ح + و = ف
بند ٢٢٦ ولنفرض الآن أن الجذور الثلاثة ح و و و هـ من
المعادلة د(س) = ٠ تحقق الارتباط ع ح + ك و + ر هـ
= ف (و ع و ك و ر كميات معلومة) فيلزم أن يضاف
إلى هذا الارتباط المعادلات د(ح) = ٠ و د(و) = ٠ و د(هـ) = ٠
فإذا حذف و و هـ من المعادلتين الأخيرتين ومن الارتباط
ع ح + ك و + ر هـ = ف تحصل من ذلك معادلة تكون
مشتملة على ح وتكون محققة هي والمعادلة د(ح) = ٠

داخلاً بمثابة واحدة فى الارتباط المفروض فيتعين كلاهما بالمعادلة ٢ = ٠ وحينئذ يلزم ان يكون هذان الجذران معلومين من هذه المعادلة التى تتعين بها زيادة على ذلك للمعادلة المفروضة جميع الجذور المحققة للارتباط س + س = ف الذى يؤخذ منه ان س = ½ ف

فاذا كانت المعادلة د (س) = ٠ مشتملة على جذور كل منها يساوى ½ ف واخرى يتكون من كل اثنين منها مجموع يساوى ف فان المعادلة المحولة د (س – س) = ٠ الحادثة من المعادلة د (س) = ٠ بواسطة الارتباط هـ + و = ف تكون مساوية للمعادلة المفروضة وبناء على ذلك لا يمكن هنا استعمال الطريقة السابقة

وفى هذه الحالة اذا حذفت فى مبدأ الأمر الجذور التى كل واحد منها يساوى ½ ف أمكن تحليل المعادلة الناتجة الى مضاريب بدرجة ثانية توضع بالصورة ش – س ف + ز

ن ز هو عبارة عن حاصل ضرب الجذرين هـ و و اللذين يحصل بالنسبة لهما هـ + و = ف فاذا قسم الطرف الأول من المعادلة المفروضة

بجذر ... لذا فإن طريقة مشابهة

الطريقة ... من الارتباطات الواقعة

بين ... ثم بسط فيها الأول

على هذا ... بالجذر ...

كل واحد من مكونات القوى المتنوعة للمتغير س مساوياً

للصفر في الباقي ق الكمية غير المحتوية على س وبهذه المثابة

تحصل معادلات شرطية تكون بمثابة الارتباطات الواقعة

بين مكونات المعادلة المفروضة فإن كانت هذه المعادلات

محتوية ... لك على كميات اختيارية اقتضى دخولها

فيها لأجل ... المضروب الداخل في المعادلة المفروضة

فإنه يمكن ... الكميات غير ... يؤدي إلى

الارتباطات ...

ولنفرض الآن معادلة محتوية على مكرر ... غير معينة يدخل فيها

الجذر الواحد ثلاث مرات فإذا رمزنا لهذا الجذر بالرمز جـ

كانت المعادلة المفروضة مشتملة على المضروب $(س - جـ)^3$

أي $س^3 - 3جـ س^2 + 3جـ^2 س - جـ^3$ وحينئذ بقسم الطرف الأول

وحينئذ يكون لهاتين المعادلتين قاسم مشترك اذا جعل مساويا
للصفر تعين به الجذر ﺣ فان كانت ع = ك تعين بالقاسم
المشترك الجذران ع و و اعنى انه يكون بدرجة ثانية وان
كانت ع = ك = ر كان هذا القاسم المشترك بدرجة ثالثة

بند ٢٢٧ وما ذكر فى شأن الارتباطات المبينة بمعادلات من
المعادلات ذات الدرجة الاولى يستعمل فى الارتباطات من
حيث هى والصعوبات التى توجد فى مسائل هذا النوع لا تترتب
الا على الحذف المطلوب عمله

وقد قال المهندس لاكروا ان تنقيص درجة المعادلات لا يتأتى فى
الا اذا شوهد بين مجاهيل مسئلة ممكنة ان عدد المعادلات
يزيد عن عدد المجاهيل وهذا يحصل غالبا اذا لوحظت المسئلة
المفروضة باوجه متنوعة لانه يوجد حينئذ بالنسبة لمجهول
واحد معادلتان انهما تثبتان باتحادهما مع بعضهما يكون
لهما قاسم مشترك منه يؤخذ ابسط حل للمسئلة

بند ٢٢٨ ويلزم فى بعض الاحيان تعيين الارتباطات الواقعة
بين المكررات غير المعينة لمعادلة حتى تكون لهذه المعادلة

جذور

$(خ^2 ج + ق)\, س + خ^3 + ض\, خ^2 - ل$

ويلزم لكي تكون نسبة [illegible] يكون

$خ^2 ج + ق = 0 ,\quad خ^3 + ك\, خ^2 + ل = 0$

وبحذف خ منهما بين المعادلتين يشاهد أن الارتباط المطلوب يكون مبيناً بالصورة

$ق^3 - ج\, ك\, ق + ج^2 ل = 0$

في المعادلات العكسية

بند ٢٢٩ يطلق على المعادلة اسم المعادلة العكسية اذا كانت لا تتغير عند ما يوضع فيها $\frac{1}{س}$ بدل س

مثلاً لنفرض المعادلة الزوجية الدرجة

$$س^6 + ج\, س^5 + ك\, س^4 + ق\, س^3 + ل\, س^2 + ط\, س + ع = 0$$

فاذا وضع في هذه المعادلة $\frac{1}{س}$ بدل س وضربت جميع حدودها في $س^6$ وقسمت على ع آل الى

$$س^6 + \frac{ط}{ع} س^5 + \frac{ل}{ع} س^4 + \frac{ق}{ع} س^3 + \frac{ك}{ع} س^2 + \frac{ج}{ع} س + \frac{1}{ع} = 0$$

ولكي لا تكون هذه المعادلة مختلفة عن المعادلة المفروضة يلزم ان يكون

سِ المعادلة على $س^{٣} - ٣ هـ س^{٢} + ٣ هـ^{٢} س - هـ^{٣}$ وتتوالى عملية القسمة التي يتوصل الى باق بدرجة ثانية بالنسبة للمتغير س وهذا الباقي يوضع بالصورة $ع س^{٢} + ك س + ف$ (بجعل ع و ك و ف رموزا للكميات محتوية على مكررات المعادلة المفروضة والكمية الاختيارية هـ) وحينئذ نوضع الكميات الثلاث هكذا: $ع = ٠$ و $ك = ٠$ و $ف = ٠$ فاذا حذف هـ من هذه المعادلات الثلاث تحصلت من ذلك معادلتان شرطيتان دالتان على الارتباطات المطلوبة الواقعة بين المكررات غير المعينة للمعادلة المفروضة

فاذا فرض الآن انه يراد تعيين الارتباطات الواقعة بين مكررات المعادلة

$$س^{٤} + ع س^{٣} + ك س^{٢} + ق س + ل = ٠$$

بشرط ان يكون لها جذران متساويان ومتخالفان في العلامة فان هذه المعادلة تكون محتوية على مضروب يوضع بالصورة $س^{٢} - هـ^{٢}$ وحينئذ اقسم الطرف الأول على $س^{٢} - هـ^{٢}$ فيتحصل من ذلك باق بدرجة اولى فهو

بالباقي

$(هـ^{٢} ع + ق)$

علم انه يلزم لكي تكون أي معادلة فردية الدرجة عكسية أن تكون الحدود التي على ابعاد متساوية من النهايتين تكون متساوية أو انها تكون متحدة في المقدار الرقمي ومتخالفة في العلامة

بند ٢٢٢ ويؤخذ من تعريف المعادلات العكسية انه اذا تحققت معادلة مشابهة للمعادلة المفروضة بالجذور ج ، ء ، ه ، ح تحققت ايضاً بالجذور $\frac{1}{ج}$ ، $\frac{1}{ء}$ ، $\frac{1}{ه}$ ، $\frac{1}{ح}$ وبناء على ذلك اذا كان ج مخالفاً عن $\frac{1}{ج}$ كان ء مخالفاً عن $\frac{1}{ء}$ ، ه مخالفاً عن $\frac{1}{ه}$ ، ح وكانت المعادلة زوجية الدرجة وزيادة على ذلك يكون الحد الأخير المساوي لحاصل ضرب الجذور مبيناً بالمقدار
واذا فرض ان $ج = \frac{1}{ج}$ كان $ج^2 = 1$ ومن هنا يكون

$ج = \pm 1$

اذا تقرر هذا وكان حاصل ضرب جذور معادلة مساوياً للحد الأخير مأخوذاً بعلامته ان كانت المعادلة زوجية الدرجة وبعلامة مخالفة لعلامته ان كانت فردية الدرجة نتج مما تقدم ان اي معادلة عكسية من المعادلات الفردية الدرجة التي يكون حدها الأخير مبيناً بالمقدار $+1$ يكون لها جذر يساوي

$\frac{\text{ا}}{\text{ع}_1}=\text{ع}$ و $\frac{\text{ه}}{\text{ع}_1}=\text{ط}_1$ و $\frac{\text{ك}}{\text{ع}_1}=\text{ل}_1$ و $\frac{\text{ق}}{\text{ع}_1}=\text{ق}_1$ و $\frac{\text{ل}}{\text{ع}_1}=\text{ك}$ و
$\frac{\text{ط}}{\text{ع}_1}=\text{ع}$

وحينئذ يؤخذ من الارتباط $\frac{\text{ا}}{\text{ع}_1}=\text{ع}$ أن $\text{ع}^2=1$ ومن هنا ينتج أن $\text{ع}=\pm 1$ فاذا فرض أن $\text{ع}=+1$ فان باقي الارتباطات تكون مبينة هكذا

$$\text{ع}=\text{ط}_1 \;\text{و}\; \text{ك}=\text{ل}_1 \;\text{و}\; \text{ق}=\text{ق}_1$$

واذا فرض أن $\text{ع}=-1$ فان باقي الارتباطات تكون مبينة هكذا

$$\text{ع}=-\text{ط}_1 \;\text{و}\; \text{ك}=-\text{ل}_1 \;\text{و}\; \text{ق}=-\text{ق}_1 \quad \text{أعني} \quad \text{ق}=0$$

وحينئذ يلزم لكي تكون معادلة زوجية الدرجة عكسية عندما يكون حدها الوسط موجودًا أن تكون مكررات باقي الحدود التي على ابعاد متساوية من النهايتين متساوية فان كان حدها الوسط معدومًا فإمّا ان تكون مكررات الحدود التي على ابعاد متساوية من النهايتين متساوية واما ان تكون لها مقادير رقمية متساوية ومتخالفة في العلامة وهذان الشرطان كافيان لتحقيق المعادلة المفروضة

واذا اجريت على المعادلة ذات الدرجة الفردية عملية مشابهة للعملية التي اجريت على المعادلة العمومية ذات الدرجة السادسة

علم

ثم تحصلت من ذلك المعادلة

$س^{٥}$ ...	$س^{٤} - ١$	$س^{٣}$ ...	$س^{٢} - ١$	$س + ١ = ٠$
+ج	−ج	+ك	−	+ج
	+ك	−ك	+ك	
		+ق	٠	

فاذا فرضت ايضاً المعادلة

(٢) .... $س^{٧}$ + ج $س^{٦}$ + ك $س^{٥}$ + ق $س^{٤}$ − ق $س^{٣}$ − ك $س^{٢}$ − ج س − ١ = ٠

التى يمكن وضعها بالصورة

$س^{٧}$ − ١ + ج س ($س^{٥}$ − ١) + ك $س^{٢}$ ($س^{٣}$ − ١) + ق $س^{٣}$ (س − ١) = ٠

يشهد من ذلك ان الطرف الأول من هذه المعادلة يحتوى على المضروب س − ١ الذى يؤخذ منه الجذر س = ١ فاذا اجريت عملية قسمة كل من الكميات ذات الحدين $س^{٧}$ − ١ و $س^{٥}$ − ١ و نحو على المضروب س − ١ تحصلت من ذلك المعادلة

$س^{٦}$ + ١	$س^{٥}$ + ١	$س^{٤}$ + ١	$س^{٣}$ + ١	$س^{٢}$ + ١	س + ١ = ٠
+ج	+ج	+ج	+ج	+ج	
	+ك	+ك	+ك		
		+ق			

وان اى معادلة عكسية من المعادلات الفردية الدرجة التى يكون حدها الأخير مبينًا بالمقدار ـ١ يكون لها جذر يساوى +١ وان اى معادلة عكسية من المعادلات الزوجية الدرجة التى يكون حدها الأخير مبينًا بالمقدار ـ١ يكون لها جذر يساوى ـ١ وجذر يساوى +١ وحينئذ اذا حذف من هذه المعادلات الجذران +١ و ـ١ تحولت الى معادلات اخرى عكسية من المعادلات الزوجية الدرجة التى تكون فيها مكورات الحدود الموضوعة على ابعاد متساوية من النهايتين متساوية ومتحدة فى العلامة

ويتوصل الى مثل هذه النواتج بمجرد النظر الى المعادلة

(١) ... $س^{٧} + ع س^{٦} + ك س^{٥} + ق س^{٤} + ق س^{٣} + ك س^{٢} + ع س + ١ = ٠$

التى يمكن وضعها بالصورة

$$س^{٧} + ١ + ع س (س^{٥} + ١) + ك س^{٢} (س^{٣} + ١) + ق س^{٣} (س + ١) = ٠$$

ومن هنا يؤخذ ان الطرف الأول من هذه المعادلة يحتوى على المضروب س+١ الذى ينتج منه الجذر ـ١ فاذا اجريت عملية قسمة كل من الكميات ذات الحدين $س^{٧} + ١$ و $س^{٥} + ١$ و $الخ$ على المضروب

باقيًا على حاله عندما توضع الكمية $\frac{1}{\text{س}}$ بدل س أو س بدل $\frac{1}{\text{س}}$

فيؤخذ من ذلك انه اذا جعل

$$\text{س}+\frac{1}{\text{س}}=\text{ز} \quad \ldots\ldots\ldots (٤)$$

كانت مقادير المجهول ز داخلة في معادلة هي في الدرجة على النصف من المعادلة المفروضة .

فاذا فرضت المعادلة العمومية ذات الدرجة السادسة

$$\text{س}^٦+\text{ح}\,\text{س}^٥+\text{ك}\,\text{س}^٤+\text{ق}\,\text{س}^٣+\text{ك}\,\text{س}^٢+\text{ح}\,\text{س}+١=٠ \quad \ldots (٥)$$

لزم لتحصيل المعادلة التي تتحصل منها مقادير المجهول ز ان يحذف المجهول س من هذه المعادلة والمعادلة (٤) وذلك بأن تقسم جميع حدود المعادلة (٥) على $\text{س}^٣$ فتتحول الى الصورة

$$\text{س}^٣+\frac{1}{\text{س}^٣}+\text{ح}\left(\text{س}^٢+\frac{1}{\text{س}^٢}\right)+\text{ك}\left(\text{س}+\frac{1}{\text{س}}\right)+\text{ق}=٠ \quad \ldots (٦)$$

وبرفع طرفي المعادلة (٤) الى الدرجة الثانية يحدث

$$\text{س}^٢+\frac{1}{\text{س}^٢}=\text{ز}^٢-٢$$

فاذا ضربت هذه المعادلة في المعادلة (٤) حدث

$$\text{س}^٣+\frac{1}{\text{س}^٣}=\text{ز}^٣-٢\text{ز}-\left(\text{س}+\frac{1}{\text{س}}\right)=\text{ز}^٣-٣\text{ز}$$

واذا وضعت في المعادلة (٦) المقادير $\text{س}+\frac{1}{\text{س}}$ و $\text{س}^٢+\frac{1}{\text{س}^٢}$ و $\text{س}^٣+\frac{1}{\text{س}^٣}$

واذا فرضت المعادلة

$$س^{6} - ج\, س^{5} + ك\, س^{4} - ك\, س^{2} - ج\, س - ١ = ٠$$

التي يمكن وضعها بالصورة

$$س^{6} - ١ + ج\, س(س^{4} - ١) + ك\, س^{2}(س^{2} - ١) = ٠$$

شوهد من ذلك ان الطرف الأول من المعادلة يحتوى على المضروب

$س^{2} - ١$ الذى يؤخذ منه الجذران $س = +١$ و $س = -١$ فاذا

اجريت عملية قسمة كل من الكميات ذات الحدين $س^{6} - ١$ و $س^{4} - ١$

و $س^{2} - ١$ على المضروب $س^{2} - ١$ تحصلت من ذلك المعادلة

$$س^{4} + ج\, س^{3} + (ك + ١)\, س^{2} + ج\, س + ١ = ٠$$

بند ٣٣ ولنتصدى الآن لبيان الكيفية التي بها يمكن تحويل حل معادلة عكسية زوجية الدرجة مكرراتها التي على ابعاد متساوية من النهايتين متساوية ومتحدة فى العلامة الى حل معادلة على النصف منها فى الدرجة فنقول

حيث ان جذور المعادلة تنقسم الى جملتين بحيث اذا كان واحد من جذور احديهما بين الجملتين مبينا بالرمز $س$ كان الجذر المقابل له من الجملة الاخرى مبينا بالرمز $\frac{١}{س}$ والمجموع $س + \frac{١}{س}$

باقيا

$س + \frac{١}{س}$ وبهذه الصورة يستدل على انه يحصل للكمية ذات الحدين $س^{ن} + \frac{١}{س^{ن}}$ مقدار ذو درجة ن بالنسبة الى ز

[illegible] ولنمثل لذلك بالمعادلة

$$٤س^{٦} - ٢٤س^{٥} + ٥٧س^{٤} - ٧٣س^{٣} + ٥٧س^{٢} - ٢٤س + ٤ = ٠$$

وبقسمة هذه المعادلة على $س^{٣}$ وجمع الحدود المتماثلة الوضع يحدث

$$٤\left(س^{٣} + \frac{١}{س^{٣}}\right) - ٢٤\left(س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}}\right) + ٥٧\left(س + \frac{١}{س}\right) - ٧٣ = ٠$$

وبفرض $س + \frac{١}{س} = ز$ يحدث

$$س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}} = ز^{٢} - ٢ \quad و \quad س^{٣} + \frac{١}{س^{٣}} = ز^{٣} - ٣ز$$

وحينئذ تؤول المعادلة السابقة الى

$$٤ز^{٣} - ٢٤ز^{٢} + ٤٥ز - ٢٥ = ٠$$

وحيث ان هذه المعادلة تتحقق بالجذر +١ فبحذف المضروب $س - ١$ تحصل من ذلك معادلة ذات درجة ثانية كل من جذريها يساوي $\frac{٥}{٢}$

فاذا جعل $ز = \frac{٥}{٢}$ حدث $س = ٢$ و $س = \frac{١}{٢}$ وبجعل $ز = ١$ يحدث

$$س = \frac{١}{٢}\left(١ \pm \sqrt{-٣}\right)$$

تحصلت من ذلك معادلة بدرجة ثالثة مشتملة على المجهول ز

ومتى تحصلت جذور هذه المعادلة تعينت مقادير س بواسطة

المعادلة (٤) بعد تحويلها الى المعادلة

$س^٢ - زس + ١ = ٠$ التي يؤخذ منها أن $س = \frac{١}{٢} ز \pm \sqrt{\frac{١}{٤} ز^٢ - ١}$

وكل مقدار مفروض للمتغير ز يؤخذ منه مقداران للمتغير س

يكون حاصل ضربهما مساوياً للواحد

ويمكن بيان الكميات ذات الحدين $س + \frac{١}{س}$ و $س^٢ + \frac{١}{س^٢}$ و $س^٣ + \frac{١}{س^٣}$ ...

بالنسبة للكمية ز مع ملاحظة الارتباط $س + \frac{١}{س} = ز$ اذ يستعمل

القانون العمومي الذي يتوصل اليه بواسطة ضرب $س^ن + \frac{١}{س^ن}$ في $س$

$+ \frac{١}{س}$ على موجب قواعد الضرب فيحدث

$$\left(س^ن + \frac{١}{س^ن}\right)\left(س + \frac{١}{س}\right) = س^{ن+١} + \frac{١}{س^{ن+١}} + س^{ن-١} + \frac{١}{س^{ن-١}}$$

ومن هنا يؤخذ أن

$$(٧) \dots س^{ن+١} + \frac{١}{س^{ن+١}} = \left(س^ن + \frac{١}{س^ن}\right)\left(س + \frac{١}{س}\right) - \left(س^{ن-١} + \frac{١}{س^{ن-١}}\right)$$

وحينئذ تستنتج مقادير الكميات ذات الحدين $س^٢ + \frac{١}{س^٢}$ و $س^٣ + \frac{١}{س^٣}$ و $لخ$ من القانون (٧) وذلك بان يجعل فيه على التوالي

$ن = ١$ و $ن = ٢$ و $ن = ٣$ و $لخ$ ويوضع في كل مرة من ذلك ز

بدل

(ز٢-١) س - ز ويلزم لتكميل عملية الحذف ان تقسم بعض الكمية

س٢ - زس + ١ على (ز٢-١) س - ز [illegible] نفسها الى

باق هو الواحد وبناء على ذلك تتحصل جميع الحلول [illegible] للمعادلة

المفروضة س٢ - زس + ١ = ٠ بان توضع على التوالي في [illegible]

جميع مقادير ز المستخرجة من المعادلة ٤ ز٢ - ٤ [illegible]

التي هي عين المعادلة المتحصلة آنفا

ويمكن التنبيه ايضا على ان الكمية ذات الحدود الثلاثة س٢ - زس + ١

لما كانت هي المقدار العمومي لقاسم بدرجة ثانية ينقسم عليه المعادلة

المفروضة وكانت مطابقة لجذرين حاصل ضربهما مساو للواحد

تحصلت من ذلك المعادلة التي تستخرج منها مقادير ز وذلك

بفرض ان الطرف الاول من المعادلة المفروضة يكون قابلا للقسمة

على س٢ - زس + ١ وهذا التنبيه يوصل الى عمليات لا تختلف

عن العمليات السابقة وبناء على ذلك يلزم اجراء عملية قسمة الطرف

الاول من المعادلة المفروضة على س٢ - زس + ١ الى ان يتحصل

باق بدرجة اولى كالباقي م س + ن

ومن هنا تحصل المعادلتان م = ٠ ، ن = ٠ وحيث ان [illegible]

وعلى ذلك يكون للمعادلة المفروضة جذران متساويان كلاهما يساوى ١ وآخران كلاهما يساوى ½ وجذران تخيليان هما ½ (١ ± √-٣)

بند ٢٣٣ ويمكن ان نستعوض طريقة الحذف المتقدمة فى (بند ٢٣١) بالطريقة العمومية المقررة فى الباب الحادى عشر فنؤول للمعادلة (٤) كما ذكر الى

س٢ - ز س + ١ = ٠

فاذا كانت المعادلة المفروضة لا تختلف عن المعادلة المذكورة فى المثال السابق فانه يحصل بعد جعل م١ س + م٢ رمز الباقى قسمة الطرف الاول من هذه المعادلة على س٢ - ز س + ١

م١ = ٤ ز٥ - ٢، ز٤ + ١٤ ز٣ - ز٢ - ٤٥ ز + ٥، ٥

م٢ = - ٤ ز٤ + ٤، ز٣ - ٤٥ ز٢ + ٥، ز

ومن هنا يشاهد ان الكميتين الكبريين فى الحدود م١ و م٢ لهما قاسم مشترك هو

٤ ز٣ - ٤، ز٢ + ٤٥ ز - ٥،

وحينئذ يحصل من قسمة م١ س + م٢ على هذا القاسم الخارج (ز٢ - ١)

وبناء على ذلك لا تتغير في الأعمال علامة جذر تخيلية غير العلامة $\sqrt{-1}$

فاذا فرضت الآن المعادلة التامة ذات الدرجة الثانية

$$\text{س}^2 - \text{ج}\,\text{س} + \text{ك} = 0$$

شوهد انه اذا كان ك $>$ $\frac{1}{4}$ ج^2 كانت جذور هذه المعادلة تخيلية ولتجتنب الكسور يوضع ل بدل $\frac{1}{2}$ ج وليبان أن ك أكبر من $\frac{1}{4}$ ج^2 يفرض أن ك = ل^2 + ى^2 فتؤول المعادلة المفروضة الى

$$\text{س}^2 - 2\,\text{ل}\,\text{س} + \text{ل}^2 + \text{ى}^2 = 0$$

وجذور هذه المعادلة تعلم من القانون

$$\text{س} = \text{ل} \pm \sqrt{-\text{ى}^2}$$

الذي يكتب بمقتضى ما ذكر هكذا

$$\text{س} = \text{ل} \pm \text{ى}\sqrt{-1}$$

ويطلق على اسم المقدار التخيلي على كل كمية لا يمكن بيانها بأي مقدار حقيقي موجب أو سالب غير أن الكميتين التخيليتين الموضوعتين بالصورة ل + ى $\sqrt{-1}$ أو ل − ى $\sqrt{-1}$ هما اللتان تستعملان دون غيرهما في الحسابات الجبرية ولهذا اذا اطلق اسم الكمية التخيلية لا [illegible]

المعادلتين مخفضات لمقادير ز فيلزم ان يبحث عن القاسم المشترك
الأعظم بين الكميتين الكثيرتي الحدود دا ، ه ويجعل مساويا
للصفر فتتحصل من ذلك المعادلة المشتملة على المجهول ز

في تحويل المقادير التخيلية ذات الدرجة الثانية
الى الصورة ل + ى √-١ وقياسها وجمعها وطرحها وضربها وقسمتها
وهي على هذه الصورة

بند ٣٣٤ هذا وان كان تعيين الجذر التربيعي لكمية سالبة يدل على
عملية مستحيلة الا ان علماء الجبر يفرضون ان الجذور التخيلية كميات
ويستعملونها بكثرة في الحسابات بواسطة بعض توافيق
مثلا اذا جعل ى رمز الكمية حقيقية كانت جذور الكمية السالبة
- ى² مبينة في العادة بالصورة ± √-ى² وحيث انه يمكن
اعتبار الكمية السالبة كحاصل ضرب ى² × -١ فان فرض أن الجذور
التربيعية لهذا الحاصل متحصلة كما في الحالة التي تكون فيها المضاريب
موجبة من ضرب الجذور التربيعية لهذه المضاريب في بعضها
فان الجذور التربيعية للكمية - ى² تكون مبينة بالصورة ± ى √-١
وحينئذ يكون المقداران ± √-ى² ، ± ى √-١ متكافئين

وثانيا

يلاحظ ان مربع √-١ هو -١ ولنوضح ذلك بمثال مشتمل على كمية
جمع مقدارين تخيليين وطرحهما وضربهما هو

(ل + ى √-١) + (لا + ط √-١) = ل + لا + (ى + ط) √-١ و

(ل + ى √-١) - (لا + ط √-١) = ل - لا + (ى - ط) √-١ و

(ل + ى √-١) (لا + ط √-١) = ل لا - ى ط + (ل ط + لا ى) √-١

فاذا اجرينا عملية الجمع على المقدارين المقترنين

ل + ى √-١ و ل - ى √-١

تحصلت من ذلك الكمية الحقيقية ٢ل واذا ضربا في بعضهما
كان حاصل ضربهما كمية حقيقية هي ل٢ + ى٢
ويطلق على المقدار المطلق للجذر التربيعي للكمية ل٢ + ى٢ اسم
قياس كل من المقدارين ل + ى √-١ و ل - ى √-١ ومن هنا
يؤخذ ان قياس اي كمية حقيقية هو المقدار المطلق لهذه الكمية
ولكي يكون القياس √(ل٢ + ى٢) معدوما يلزم ان يكون ل = ٠ ، ى = ٠
ليؤول المقدار ل + ى √-١ في هذه الحالة الى الصفر ويلزم
بعكس ذلك لكي يكون المقدار ل + ى √-١ معدوما ان يكون قياسه
مساويا للصفر لان هذا يستلزم جعل ل = ٠ ، ى = ٠ ليكون

في العادة الا الى الكمية الموضوعة بهذه الصورة

فاذا انعدمت في المقدار ل + ٮ $\sqrt{-1}$ الكمية ٮ التي هي مكرر

$\sqrt{-1}$ آل الحد ٮ $\sqrt{-1}$ الى الصفر وبهذا يؤول المقدار المذكور الى الكمية

الحقيقية ل وحينئذ تعتبر المقادير الحقيقية كحالة خصوصية

من المقادير التخيلية ومن البديهي انه يلزم لكي تكون المعادلة

التخيلية متساوية ان تكون في هذه المقادير الكميات

الحقيقية متساوية وبناء على ذلك فأي معادلة طرفاها كميات تخيلات

تكون كناية عن حاصل جمع معادلتين اطرافها هي الكميات الحقيقية الداخلة

في هذه المعادلة مثلا المعادلة

ل − ٮ $\sqrt{-1}$ = لا + ط $\sqrt{-1}$

كناية عن المعادلتين الحقيقيتين

ل = لا ، − ٮ = ط

ويقال للمقدارين التخيليين مقترنان اذا كانا لا يختلفان عن بعضهما

الا بعلامة مكرر $\sqrt{-1}$ وذلك كالمقدارين

ل + ٮ $\sqrt{-1}$ و ل − ٮ $\sqrt{-1}$

٢٣٥ والمقادير التخيلية تنطبق عليها القواعد الحسابية بغير استثناء

وحيث ان هذا القياس كناية عن حاصل ضرب الباقية للمضاريب التخيلية التي هي كميات حقيقية موجبة فلا يكون معدوما الا اذا كان قياس واحد من هذه المضاريب مساويا للصفر وهذا لا يتأتى الا اذا كان واحد من المضاريب المذكورة معدوما وحينئذ يلزم لكي يكون اي حاصل ضرب مركب من مقادير تخيلية معدوما أن يكون واحد من هذه المضاريب مساويا للصفر .

بند ٢٣٧ اذا اجريت عملية الضرب بطريق التوالي على الكمية $\sqrt{-1}$ تحصلت من ذلك في ابتداء الامر لهذه الكمية القوى المتنوعة

$(\sqrt{-1})^1 = \sqrt{-1}$ و $(\sqrt{-1})^2 = -1$ و

$(\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}$ و $(\sqrt{-1})^4 = +1$

وحيث أن القوة الرابعة للكمية جذر $\sqrt{-1}$ هي $+1$ فاذا تكونت القوى التي تزيد عن هذه القوة تحصلت عن ذلك المقادير الأربعة

$\sqrt{-1}$ و -1 و $-\sqrt{-1}$ و $+1$.

ويمكن بيان جميع قوى الكمية $\sqrt{-1}$ بواسطة اربعة قوانين وذلك انه اذا جعل ح رمزا للعدد صحيح كانت جميع الاعداد الصحيحة محصورة في القوانين الأربعة ٤ح و ٤ح+١ و ٤ح+٢ و ٤ح+٣

$\sqrt{\text{ل}^{2}+\text{ح}^{2}} =$

ومن البديهي انه يترتب على تساوى المقدارين التخيليين في ذاتي قياسيهما وعكس ذلك لا يجوز

بند ٢٣٦ قياس المقدار التخيلي المتحصل من ضرب المقدارين $\text{ل}+\text{ح}\sqrt{-1}$ و $\text{لا}+\text{ط}\sqrt{-1}$ في بعضهما هو

$$\sqrt{\left[(\text{ل لا}-\text{ح ط})^{2}+(\text{ل ط}+\text{ح لا})^{2}\right]}$$

وحينئذ يتحصل بواسطة القواعد الحسابية

$$(\text{ل لا}-\text{ح ط})^{2}+(\text{ل ط}+\text{ح لا})^{2}=(\text{ل}^{2}+\text{ح}^{2})(\text{لا}^{2}+\text{ط}^{2})$$

وبناء على ذلك يكون القياس المذكور مساويا $\sqrt{(\text{ل}^{2}+\text{ح}^{2})(\text{لا}^{2}+\text{ط}^{2})}$ أو

$$\sqrt{\text{ل}^{2}+\text{ح}^{2}}\times\sqrt{\text{لا}^{2}+\text{ط}^{2}}$$

ومن هنا يؤخذ ان قياس حاصل ضرب مضروبين تخيليين يكون مساويا لحاصل ضرب قياسي هذين المضروبين وحينئذ يكون قياس حاصل ضرب أي جملة من المضاريب التخيلية مساويا لحاصل ضرب أقيسة هذه المضاريب

ويلزم لكي يكون اي حاصل ضرب مركب من عدة مضاريب تخيلية منعدما ان يكون قياس هذا الحاصل منعدما (كما في بند ٢٣٠)

وجب

[illegible]

[illegible] فيحصل

$$\frac{(\text{ل}+\text{ى}\sqrt{-1})(\text{لا}-\text{ط}\sqrt{-1})}{(\text{لا}+\text{ط}\sqrt{-1})(\text{لا}-\text{ط}\sqrt{-1})} = [illegible]$$

$$= \frac{\text{ل لا}+\text{ى ط}}{\text{لا}^2+\text{ط}^2} + \frac{\text{ى لا}-\text{ل ط}}{\text{لا}^2+\text{ط}^2}\sqrt{-1}$$

ويؤخذ من القاعدة المتقدمة (في [illegible]) ان [illegible] خارج قسمة الكميتين

التخيليتين على بعضهما هو خارج [illegible]

ذلك بعدد [illegible]

في الجذر التربيعي للمقدار [illegible] $\sqrt{-1}$ [illegible]

تتعلق بالمقادير الجبرية للجذور مهما كانت درجتها

بمقتضى ما تقدم (في [illegible]) من الجزء الأول يحصل

صفحة ٢٣٩

$$(1)\quad \sqrt{\text{ح}+\sqrt{\text{ء}}} = \sqrt{\frac{\text{ح}+\sqrt{\text{ح}^2-\text{ء}}}{2}} + \sqrt{\frac{\text{ح}-\sqrt{\text{ح}^2-\text{ء}}}{2}} \quad \text{و}$$

وحينئذ يؤخذ ما تقدم (√−١)^(٤ن+٢) = −١ و (√−١)^(٤ن+٣) = −√−١

(√−١)^(٤ن) = ١ و (√−١)^(٤ن+١) = +√−١

فاذا قسمت الكمية التخيلية ل + ى √−١ على الكمية الحـ

لا وفرض ان خارج القسمة ع + ك √−١ لزم ان يحصل

لا (ع + ك √−١) = ل + ى √−١

او ع لا + ك لا √−١ = ل + ى √−١

وينتج من هذه المتساوية الأخيرة ان ع لا = ل و ك لا = ى

يؤخذ أن ع = ل/لا و ك = ى/لا وحينئذ يكون خارج القـ

ل/لا + ى/لا √−١

واذا قسمت الكمية التخيلية ل + ى √−١ على لا + ط √−١ و

ان خارج القسمة يساوى ع + ك √−١ تحصل

(ع + ك √−١)(لا + ط √−١) = ل + ى √−١ أو

ع لا − ك ط + (ع ط + ك لا) √−١ = ل + ى √−١

وهذه المعادلة تنقسم الى معادلتين اخريين هما

ع لا − ك ط = ل و ع ط + ك لا = ى

ومنهما يؤخذ أن

ع =

أربعة جذور بدرجة رابعة هى

$$\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \text{ و } -\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \text{ و } \frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \text{ و } -\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

تنبيه ويلزم لتحصيل الجذور التى بدرجة رابعة لكمية كالكمية ج ان تحل المعادلة

$$ز^4 = ج$$

بان يقال اذا فرض فى مبداء الأمر ان الكمية ج موجبة ثم جعل ح رمزا للعدد الذى تكون به قوته الرابعة مساوية للكمية ج وفرض ان $ز = ح ص$ آلت المعادلة $ز^4 = ج$ الى

$ح^4 ص^4 = ح^4$ ومنها يؤخذ ان $ص^4 = 1$ أو $ص^4 - 1 = 0$

وحيث أن $ص^4 - 1$ هو حاصل ضرب $ص^2 - 1$ فى $ص^2 + 1$ فيمكن تحويل المعادلة $ص^4 - 1 = 0$ الى المعادلتين

$$ص^2 - 1 = 0 \text{ و } ص^2 + 1 = 0$$

فأما المعادلة الأولى فيؤخذ منها $ص = \pm 1$ وأما الثانية فيتحصل منها $ص = \pm\sqrt{-1}$ فاذا ضربت مقادير ص الأربعة فى ح تحصلت للكمية ج أربعة جذور بدرجة رابعة هى

$$+ح \text{ و } -ح \text{ و } +ح\sqrt{-1} \text{ و } -ح\sqrt{-1}$$

واذا فرض ان الكمية التى يراد تحصيل جذورها الأربعة سالبة

$$(٢)\quad \sqrt{ح - \sqrt{د}} = \sqrt{\frac{ح + \sqrt{ح^{2} - د}}{2}} - \sqrt{\frac{ح - \sqrt{ح^{2} - د}}{2}}$$

ويمكن بواسطة هذين القانونين تحصيل الجذرين التربيعيين للمقدارين التخيليين $ل + ب\sqrt{-1}$ و $ل - ب\sqrt{-1}$ وذلك بان يوضع ل بدل ح و $-ب^{2}$ بدل د فيحدث

$$(٣)\quad \sqrt{ل + ب\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{ل + \sqrt{ل^{2} + ب^{2}}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{ل^{2} + ب^{2}} - ل}{2}} \cdot \sqrt{-1}$$

$$(٤)\quad \sqrt{ل - ب\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{ل + \sqrt{ل^{2} + ب^{2}}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{ل^{2} + ب^{2}} - ل}{2}} \sqrt{-1}$$

تنبيه واذا اريد تحصيل الجذرين التربيعيين للمقدارين التخيليين $+\sqrt{-1}$ و $-\sqrt{-1}$ فانه يلزم في القانونين (٣) و (٤) جعل ل = ٠ و ب = ١ فيحدث

$$\pm\sqrt{+\sqrt{-1}} = \pm\frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \quad و$$

$$\pm\sqrt{-\sqrt{-1}} = \pm\frac{1 - \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

وحينئذ يكون الجذران التربيعيان للمقدارين $+\sqrt{-1}$ و $-\sqrt{-1}$ كناية عن المقادير المتحصلة للمجهول ز في المعادلة $ز^{4} = -1$ لانه يمكن وضع هذه المعادلة بالصورة $(ز^{2})^{2} = -1$ التي يؤخذ منها أن $ز^{2} = \pm\sqrt{-1}$ ويؤخذ ايضا من المعادلة $ز^{4} = -1$ أن ز جذر بدرجة رابعة للمقدار -1 ومن هنا يعلم انه يوجب للمقدار -1

اربعة

منه للمجهول $ز^{ك-٢}$ مقداران وكلا هذين المقدارين الجديدين يكون منه للمجهول $ز^{ك-٣}$ مقداران وهكذا الى أن يحصل للمجهول ز عدد من المقادير يساوى $٢^{ك}$ وجميع هذه المقادير تؤول الى كيات توضع بالصورة $ع + ك\sqrt{-١}$ لانه قد تقدم ان الجذور التربيعية لأى مقدار موضوع بهذه الصورة هى مقادير توضع بالصورة المذكورة ويبرهن بالسهولة على ان جميع المقادير المتحصلة للمجهول ز مختلفة بعضها عن بعض فيقال اذا تحققت هذه النظرية فى المعادلة $ز^{٢^{ك-١}} = ج$ تحققت ايضا فى المعادلة $ز^{٢^{ك}} = ج$ وحينئذ اذا فرض أن $م + ح\sqrt{-١}$ و $م' + ح'\sqrt{-١}$ كناية عن مقدارين تخيليين غير متساويين من مقادير المجهول ز بهما تحقق المعادلة $ز^{٢^{ك-١}} = ج$ كانت مقادير المطابقة لهذه المقادير فى المعادلة $ز^{٢^{ك}} = ج$ هى الجذور التربيعية لهذين المقدارين التخيليين لكنه يلزم بمقتضى المعادلتين المتقدمتين (خ ٣٣٩) ان يكون الجذران التربيعيان للكمية $م + ح\sqrt{-١}$ مختلفين عن بعضهما وان يكون الجذران التربيعيان للكمية $م' + ح'\sqrt{-١}$ مختلفين عن بعضهما ايضا وزيادة على ذلك يكون كل واحد منهما مختلفا عن الجذرين التربيعيين للكمية الأولى لانه ان كان لأم جذر مشترك

ووضعت بالصورة −ج لزم لذلك أن تحل المعادلة

$$\text{ز}^{4} = -\text{ج}$$

فاذا جعل أيضًا ح رمزًا للعدد الذي تكون قوته الرابعة مساوية

للكمية ج وفرض أن ز = ح ص فإن المعادلة $\text{ز}^{4} = -\text{ج}$ تحول

الى المعادلة $\text{ح}^{4}\text{ص}^{4} = -\text{ح}^{4}$ أو $\text{ص}^{4} = -1$

التي يؤخذ منها أن الجذور الأربعة للكمية −ج تتحصل بواسطة

ضرب الجذور الأربعة للمقدار −١ (المتحصلة كما في البند السابق)

في الجذر ح

وإذا جعل ك رمزًا للعدد صحيح و ج رمزًا لكمية حقيقية

أو لمقدار تخيلي وفرضت المعادلة

$$\text{ز}^{\text{ك}} = \text{ج} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

كانت مقادير ز المحققة لهذه المعادلة جذورًا بالدرجة ك

للكمية ج ولأنه يمكن وضع هذه المعادلة بالصورة

$$\left(\text{ز}^{\frac{\text{ك}}{2}}\right)^{2} = \text{ج}$$

وهذه المعادلة يؤخذ منها للمجهول $\text{ز}^{\frac{\text{ك}}{2}}$ مقداران كل واحد منهما يكون

من

واذا فرض انه صار استخراج الجذر التكعيبي لمقدار جـ المطلق بواسطة الطرق الحسابية وجعل هـ رمزاً لهذا الجذر التكعيبي المأخوذ بعلامة كعلامة الكمية جـ كان جـ $= هـ^3$ واذا كان $ص = هـ س$ آلت المعادلة (٨) الى

$هـ^3 س^3 = هـ^3$ ومن هنا ينتج أن $س^3 = ١$ أو $س^3 - ١ = ٠$

وحينئذ يكون $س^3 - ١$ قابلاً للقسمة على $س - ١$ (كما في بند من الجزء الاول) ويكون خارج القسمة هو $س^2 + س + ١$ وبناء على ذلك يمكن وضع المعادلة $س^3 - ١ = ٠$ بالصورة

$(س - ١)(س^2 + س + ١) = ٠$

فاذاً يلزم لكي يكون حاصل ضرب جملة مضاريب حقيقية أو تخيلية معدوماً ان يكون واحد من هذه المضاريب معدوماً (كما في بند ٢٢٦) ... جذور المعادلة $س^3 - ١ = ٠$ بواسطة حل المعادلتين

... و $س^2 + س + ١ = ٠$

فيؤخذ من المعادلة $س - ١ = ٠$ أن $س = ١$ ومن المعادلة $س^2 + س + ١ = ٠$ أن $س = \frac{-١ + \sqrt{٣}\sqrt{-١}}{٢}$ أو $س = \frac{-١ - \sqrt{٣}\sqrt{-١}}{٢}$

ومن هنا يعلم ان المعادلة لها ثلاثة جذور تكعيبية $\frac{-١ + \sqrt{٣}\sqrt{-١}}{٢}$ و $\frac{-١ - \sqrt{٣}\sqrt{-١}}{٢}$

ورفع هذان الجذران الى القوة الثانية كان الناتج واحداً وبناء على ذلك

لا تكون الكميات م + ح $\sqrt{-1}$ و م + ح $\sqrt{-1}$ مختلفتين عن بعضهما

وهذا مخالف للفرض

تمهيد فاذا فرضت المعادلة

(٦) ..... $ز^م = ج$

وجعل م رمزاً لعدد صحيح كانت المقادير المتحصلة للمجهول ز من هذه

المعادلة تجذورا بالدرجة م للكمية ج فان كان م عدداً

زوجيا وضع بالصورة ح × ك وحيث ان ح هو عدد فردي

فان فرضت المعادلة $ز^ك = ص$ تحولت المعادلة (٦) الى

(٧) .... $ص^ح = ج$

ومنها امكن تعيين مقادير ص المختصة لهذه المعادلة تحصل للمجهول من كل

مقدار مفروض لهذا المجهول بواسطة العمليات المتوالية التي تجرى لاستخراج

الجذور التربيعية عدد من المقادير يساوي ك

واذا لوحظت الحالة التي تكون فيها ج كمية حقيقية موجبة او سالبة

وكان ح = ٢ آلت المعادلة (٧) الى

(٨) .... $ص^٢ = ج$

وبجعل ه رمزاً للعدد الذي اذا رفع الى القوة الثالثة تحصل منه الكمية ح كانت جذور ثلاثية التكعيب لهذه الكمية مبينة بالرموز ه و ه ل و ه $ل^{٢}$ والجذور التربيعية لجذر ه مبينة بالرمز ± ه والجذور التربيعية للجذر ه ل مبينة بالرمز ± ه ل وتحصيل الجذور التربيعية لجذر ه $ل^{٢}$ ينبه على ان الارتباط $ل^{٣} = ١$ يؤخذ منه $ل^{٤} = ل$ ومن هنا ينتج ان الجذور التربيعية لجذر ه $ل^{٢}$ تكون مبينة بالرمز ± ه $ل^{٢}$ وحينئذ تكون الجذور التي بدرجة سادسة للكمية ح مبينة بالرموز

± ه و ± ه ل و ± ه $ل^{٢}$

ويمكن تحصيل هذه الجذور بكيفية اخرى هي انه اذا رمز للواحد منها بالرمز ز تحصلت من ذلك المعادلة

$$ز^{٦} = ح$$

ولنرمز ايضاً بالرمز ه للعدد الذي اذا رفع الى القوة السادسة تحصلت منه الكمية + ح فتكون $ح = ه^{٦}$ فاذا فرض $ز = ه ص$ آلت المعادلة $ز^{٦} = ح$ الى الصورة

$ه^{٦} ص^{٦} = ه^{٦}$ ومنها ينتج أن $ص^{٦} = ١$ أو $ص^{٦} - ١ = ٠$

فاذا ضربت هذه الجذور التكعيبية الثلاثة للواحد في جـ تحصلت

جميع الجذور التكعيبية للكمية أ جـ

واذا اريد معرفة الكيفية التي يكون بها المقدار ½ (-١+ ٣√-٣) جذراً تكعيباً لزم ان يرفع هذا المقدار الى القوة الثالثة وذلك برفعه الى القوة الثانية فيتحصل من ذلك المقدار ½ (-١-٣√-٣)

الذي يتحصل من ضربه في ½ (-١+٣√-٣) حاصل ضرب هو الواحد.

ومنه يعرف أن مكعب ½ (-١-٣√-٣) يساوي الواحد

ويستنبط من هذه العمليات الحسابية ان كل واحد من الجذرين التكعيبين التخيليين للواحد عبارة عن مربع الآخر وحينئذ اذا رمز للاختصار لاحد من هذين الجذرين بالرمز ل كان الآخر مبينا بالرمز ل² واذا جعل جـ كما كان رمزاً للجذر التكعيبي الحقيقي للكمية أ جـ كانت الجذور الثلاثة التكعيبية للكمية أ جـ مبينة بالرموز جـ جـ ل جـ ل²

٢٤٤ ويكفي لتحصيل الجذور التي بدرجة سادسة لأي كمية ان تؤخذ الجذور التربيعية لكل من الجذور الثلاثة التكعيبية لهذه الكمية فاذا فرض ان الكمية المفروضة موجبة ورمز اليها بالرمز + أ جـ

في المعادلات ذات الحدين ، معادلات ذات الحدود الثلاثة التي يمكن تحويلها الى معادلات ذات حدين ثانية

بند ٢٤٠ يطلق اسم المعادلات ذات الحدين على المعادلات التي يمكن وضعها بالصورة

$$س^{م} - ج = ٠ \quad .... (١)$$

و ج هي كناية عن كمية معلومة

وجذور المعادلة (١) هي المقادير المتنوعة الجبرية التي تعرض للكمية $\sqrt[م]{ج}$ وبناء على ذلك يكون لها جذور عددها م (كما في بند ٢٣٩) على اى وجه كان المقدار الحقيقي او التخيلي للكمية ج وهذه الجذور تكون كلها غير متساوية لانه لا يوجد مضروب مشترك بين الكمية ذات الحدين $س^{م} - ج$ ومشتقتها ذات الدرجة الاولى $م س^{م-١}$ وحينئذ يكون للمقدار الجذري $\sqrt[م]{ج}$ باعتباره جبريا مقادير عددها م مختلفة بعضها عن بعض

فاذا جعل ج رمزا للواحد من مقادير الكمية الجذرية $\sqrt[م]{ج}$ أعني الواحد من جذور المعادلة (١) كان $ج^{م} = ج$ واذا فرض $س = ج ص$ ووضع مقدار س هذا في المعادلة المفروضة

وحيث ان $ص^{٦} - ١$ عبارة عن حاصل ضرب $ص^{٣} - ١$ فى $ص^{٣} + ١$ فيمكن
استعواض المعادلة $ص^{٦} - ١ = ٠$ بالمعادلتين

$$ص^{٣} - ١ = ٠ \quad و \quad ص^{٣} + ١ = ٠$$

وحيث ان جذور المعادلة $ص^{٣} - ١ = ٠$ هى ١ و ل و $ل^{٢}$ فتكون جذور المعادلة $ص^{٣} + ١ = ٠$ هى −١ و −ل و $-ل^{٢}$ فاذا ضربت هذه المقادير الستة المفروضة للمتغير ص فى حـ كانت الجذور السداسية $\sqrt[٦]{حـ}$ هى +حـ و +حـ ل و $+حـ ل^{٢}$ و −حـ و −حـ ل و $-حـ ل^{٢}$

ويستنبط من الملحوظات المتقدمة ان الجذور التى درجتها قوة من قوى العدد ٢ أو حاصل ضرب العدد ٣ فى قوة من قوى ٢ تكون لها مقادير بقدر ما يوجد فى درجتها من الآحاد

وقد تقدم أن هذه النظرية تشتمل على جذور سائر الدرجات لانه اذا رمز بالحرف م لعدد صحيح كان دائماً للكمية الحقيقية أو للمقدار الموضوع بالصورة $ع + ك\sqrt{-١}$ جذور عددها م بالدرجة م وحينئذ توضع جميع المقادير التخيلية لهذه الجذور بالصورة $ع + ك\sqrt{-١}$

(٧)

كانت هذه المعادلة الصحيحة ... لها جذر حقيقي غير
ولا يمكن تحقيقها بقيمة ... المفروضة للتغير
... الاخرى ... تختلف عن الواحد
كأن $ص^{2م+1}$ ...

واذا قسم الطرف الاول من المعادلة المفروضة على ص−١ تحصلت
من ذلك المعادلة

$$ص^{2م} + ص^{2م-1} + ص^{2م-2} + \dots + ص^2 + ص + ١ = ٠ \dots\dots (٦)$$

وحل هذه المعادلة يرجع الى حل معادلة نصفها في الدرجة (كما في ... ٣٩)
والمعادلة $ص^{2م+1} + ١ = ٠$ لها جذر يساوى −١ وأما جذورها
الاخرى فهي تخيلية

ولتعيين هذه الجذور يلزم في المعادلة حذف المضروب ص+١
الذي يحصل منه في معادلة مكعبة درجتها ٢م وان
يلاحظ انه اذا تحصلت جذور المعادلة $ص^{2م+1} - ١ = ٠$ لزم
تغيير علامات هذه الجذور لتحصل من ذلك جذور المعادلة $ص^{2م+1} + ١ = ٠$

فاذا جعل م رمز العدد زوجي كالعدد ٢م كان للمعادلة
$ص^{2م} - ١ = ٠$ جذران حقيقيان هما +١ و −١ وأما باقي جذورها

... تحصلت من ذلك المعادلة

$$= 1 - س$$ ...... (٢)

ومن ذلك تتحصل جميع مقادير $\sqrt[م]{ح}$ بواسطة ضرب اى واحد من مقادير $\sqrt[م]{ح}$ التي عددها م

... أن الحد المعلوم من المعادلة ذات الحدين كمية حقيقية ونرمز لهذا الحد بالرمز ± ح بفرض ح كمية موجبة آلت المعادلة الى

$$س^{م} \mp ح = 0$$ ...... (٣)

... رمز لواحد من المقادير الوهمية للكمية الجذرية ... = ص آلت المعادلة (٣) الى المعادلة

$$ص^{م} \mp 1 = 0$$ ...... (٤)

... ان المعادلة (٤) هذه عكسية فيلزم حلها بالمثابة المتقدمة في بندى ٣٢٩ و ٣٣٠)

فاذا فرض في هذه الاحوال م كناية عن عدد فردى كالعدد ٢م+١

ثم لوحظت المعادلة

$$س^{٢م+١} - 1 = 0$$ ...... (٥)

كان

وأن [illegible]

[illegible]

فتكون الكيفية [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] الأخيرة [illegible]

أولاً [illegible] التي يجد ورها لتخيلية هي مقد [illegible]

[illegible]

[illegible]

وثانياً [illegible]

[illegible]

فانها تكون تخيلية ولتعيين هذه الجذور يلزم ان تقسم المعادلة المفروضة على $ص^٢-١$ فتحصل من ذلك معادلة عكسية درجتها $٢ح-٢$ لا تكون مشتملة الا على قوى زوجية للمجهول لكنه يسهل حل المعادلة $ص^{٢ح}-١=٠$ بواسطة قسمتها الى المعادلتين $ص^٢-١=٠$ و $ص^٢+١=٠$

حيث ان المعادلة $ص^{٢ح}+١=٠$ لها جذور تخيلية فقط فيلزم تحويلها الى معادلة نصفها في الدرجة بأن يجعل $ص+\frac{١}{ص}=ز$ ويمكن ايضا ان حل المعادلة $ص^{٢ح}+١=٠$ يؤول الى حل معادلة ذات حدين فردية الدرجة وذلك بأن يجرى عليها الطريقة المتقدمة (في بندى ٣٤٢ و ٣٤٣)

٣٤٧ ومما ينبغي التنبيه عليه انه اذا حذفت الجذور الحقيقية للمعادلة $ص^ح \mp ١=٠$ بأن وضع فيها $ص+\frac{١}{ص}=ز$ كانت جميع جذور المعادلة المشتملة على ز حقيقية دائما ولهذا نفرض ان $ل+ى\sqrt{-١}$ احد المقادير التخيلية للمتغير ص فيكون عكس هذا المقدار هو $\frac{١}{ل+ى\sqrt{-١}}$ فيكون

$$\frac{١}{ل+ى\sqrt{-١}}=\frac{ل-ى\sqrt{-١}}{(ل+ى\sqrt{-١})(ل-ى\sqrt{-١})}=\frac{ل-ى\sqrt{-١}}{ل^٢+ى^٢}$$

[illegible] المعادلة [illegible] أمكن استخراج

[illegible] هو [illegible]

[illegible]

وإن كانت [illegible] تخرج من [illegible] المعادلتين

إلى الناتج من المعادلة [illegible]

وإذا كانت [illegible] تخيلية فلا يمكن [illegible]

المعادلة [illegible] بواسطة [illegible] الجبرية [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] المعادلة [illegible] الجذرية [illegible] أي

معادلة لم يجعل [illegible] موضوعة بلا منها الجذرية

مساوية للمجهول ما فيحصل من ذلك عدة معادلات

تنتهي كل واحدة منها إلى الدرجة المبينة بدليل الجذر

ونضم هذه المعادلات إلى المعادلة المتحصلة من استعواض

علامة الجذر بالمجهول التي جعلت مساوية له في المعادلة الأصلية

وثالثاً المعادلة $س^٣+١=٠$ التي جذورها هي

$ص=-١$ ، $س=\frac{١\pm\sqrt{-٣}}{٢}$ ، $س=\frac{...}{...}$

ورابعاً المعادلة $س^٦-١=٠$ التي جذورها مركبة من جذور المعادلة

السابقة $س^٣+١=٠$ ومن جذور المعادلة $س^٣-١=٠$

التي يمكن تحليلها إلى المعادلتين $س^٢+١=٠$ و $س^٢-١=٠$

والقواعد المتقدمة (في بند ١٩٨ و ٢٠٢ الخ)

بند ٢٤٩ توصل إلى مقادير جذور المعادلة $س^م\mp١=٠$ في الحالة التي يكون

فيها أن م دالة على قوة العدد ٢ أو على حاصل ضرب هذا العدد

٢ أو ٥ في أي قوة للعدد ٢ فإن كانت هذه المقادير دالة

على خطوط مستقيمة أمكن بالهندسة تحصيل هذه الجذور مهما

كان مقدار الكمية (م)

بند ٢٥٠ ويطلق اسم المعادلة ذات الحدود الثلاثة على كل معادلة

يمكن وضعها بالصورة

(٧) .... $س^{٢م}+ع س^م+ك=٠$ . . . . (ا)

فإذا فرض في هذه المعادلة أن $س^م=ص$ حدث

$ص^٢+ع ص+ك=٠$

وإذا

فهو مقبول [illegible] الطريقة [illegible] بالصورة

[illegible]

وبترتيب المعادلة [illegible] والمتشابهة

[illegible] = ٢٧

[illegible] المعادلة

س٣ − ١٨ س [illegible] = ٠

وهذه المعادلة لها ثلاثة جذور واحدها منطق وهو ٥ والجذران

الاخران المخرجان من المعادلة ١٦ س٢ − ٤٠٤ س + ٢٨١ = ٠ تخيليان

فأما الجذر الحقيقي س = ٥ فانه لايكون محققا للمعادلة المفروضة

في الحالة التي لا يلاحظ فيها غير المقادير الرقمية للعلامات الجذرية

الا انه يكون محققا لهذه المعادلة اذا تغيرت علامة $\sqrt{\text{س} - ٤}$

فاذا حذفت العلامات الجذرية الموجودة في معادلة تحصلت

من المعادلة المنطقة الحادثة من ذلك جميع المقادير المجهولة للمعادلة

المفروضة وجميع المعادلات الناتجة منها وذلك بملاحظة المقادير

المتنوعة للعلامات الجذرية لانه اذا جعلت كل علامة بما تحتها

مساوية لمجهول ورفع طرفا المعادلة الى قوة درجتها كدرجة

يمكن جملة من [illegible] الى المعادلة المطلوبة

بعد أن تحذف جميع العلامات الجذرية الداخلة فيها

ولنأخذ [illegible]

$$\sqrt[3]{٤س+٧} + ٢\sqrt{س-٤} = ١$$

فاذا وضع $\sqrt[3]{٤س+٧} = ص$ و $\sqrt{س-٤} = ز$ حدث

$$٤س+٧ = ص^{٣} \quad و \quad س-٤ = ز^{٢}$$

واذا حذف المجهولان ص و ز من هاتين المعادلتين ومن المعادلة

ص + ٢ز = ١ تحصل من المعادلة الأخيرة

$$ص = ١ - ٢ز$$

واذا وضع ١ − ٢ز بدل ص في المعادلة $٤س+٧ = ص^{٣}$ الى

$$٤س+٧ = ١ - ٦ز + ١٢ز^{٢} - ٨ز^{٣}$$

واذا حذف ز من هذه المعادلة ومن المعادلة $س - ٤ = ز^{٢}$

تحصلت من ذلك المعادلة

$$١٦س^{٣} - ١٨٤س^{٢} + ٨٠١س - ١٤٠٥ = ٠$$

وهذا الناتج يتحصل بحذف العلامات الجذرية من المعادلة

المفروضة وذلك بأن يرفع طرفاها الى القوى المتوالية ويحول

[illegible] فإذا [illegible] $س = [illegible]$ [illegible]

[illegible] الأمر

[illegible]

[illegible]

[illegible]

فإذا وضع س بدل [illegible]

حصلت [illegible] معادلة [illegible]

ويمكن أيضاً تحصيل المعادلة [illegible]

[illegible] المقادير المتنوعة [illegible]

وذلك [illegible] الإمكان بين الجذور التكعيبية [illegible]

والجذور التكعيبية [illegible]

فإذا عبر عن واحد من الجذور التكعيبية التخيليين للواحد بالرمز

[illegible] فإن الجذر [illegible] (كما في بند ٣٦٣)

[illegible] مقادير الحقيقية [illegible]

مطابقة [illegible]

الجميع [illegible] ذلك معادلات لا تتغير بالنسبة لجميع

[illegible] والمعادلة الانهائية

[illegible] بواسطة [illegible] لا تتحقق بها المعادلة

المفروضة [illegible] العلامات الجذرية وحيثما في الحالة

تكون معادلة المفروضة بهذه المثابة [illegible]

[illegible] يمكن بواسطة القواعد [illegible] معادلة منطقة بفرض

ان [illegible] كمية [illegible] منطقة وبذلك يتحصل المعادلة تكون جذورها

هي [illegible] التي تأخذها الكمية المفروضة بملاحظة جميع

مقادير كل من العلامات الجذرية الداخلة فيها

واذا فرضنا انه [illegible] تحصيل معادلة مجردة عن العلامات الجذرية

ونفرض نجد [illegible] هو الكمية $س = \sqrt[3]{ح} + \sqrt[3]{ء}$

فانه يكون $\sqrt[3]{ح} = ص$ و $\sqrt[3]{ء} = ز$

ومنها ينتج $ح = ص^{3}$ ، $ء = ز^{3}$ ، $س = ص + ز$

وبناء على ذلك يمكن تحصيل المعادلة المطلوبة بواسطة حذف ب

من المعادلات الثلاث المذكورة

ويمكن تحصيل هذا الناتج بواسطة حذف العلامات الجذرية من المعادلة التي

تفرض $س = ح$ وحينئذ اذا جعل ك رمزاً للزيادة التي تعطى للمتغير $س$ لزم لكي يكون $س = ح$ دالاً على النهاية الكبرى او الصغرى ان يكون الفرق $د(ح + ك) - د(ح)$ سالباً دائماً او موجباً دائماً مهما كانت علامة الكمية ك بشرط ان تكون هذه الكمية المتزايدة صغيرة بالكفاية

ويمكن ايضاً ان يقال ان المقدار $س = ح$ تؤخذ منه النهاية الكبرى او الصغرى للدلالة عندما يأخذ $س$ في الازدياد حتى يتجاوز المقدار ج وتأخذ الدلالة في الازدياد الى الحد الذي تأخذ منه في التناقص او عندما يأخذ $س$ في التناقص الى المقدار ج وتأخذ الدلالة في التناقص الى الحد الذي تأخذ منه في الزيادة

وقد شوهد انه اذا كانت الدلالة المبينة بالرمز $د(س)$ تامة حدث

$$د(س + ك) = د(ح) + دَ(ح) ك + دً(ح) \frac{ك^2}{1 \times 2} + الخ$$

ومن هنا يؤخذ

$$(1) \ldots \quad د(ح + ك) - د(ح) = دَ(ح) ك + دً(ح) \frac{ك^2}{1 \times 2} + الخ$$

فاذا فرض للكمية ك مقدار صغير بالكفاية كان الطرف الثاني من هذه المتساوية متحداً في العلامة مع حدها الاول فاذا لم تنعدم الدلالة $دَ(ح)$ كان الفرق $د(ح + ك) - د(ح)$ متخالفاً

[illegible]

[illegible]

[illegible]

ونتكون بهذا العمل ضرب ... [illegible] ... عن أن س = ا + ب [illegible]

يعطي الارتباط [illegible] كناية عن الجذور الثلاثة

للمعادلة س٣ - ١ = ٠

فإذا اجريت عملية الاختصار [illegible] عقب كل عملية

ضرب [illegible] من معادلة بدرجة تاسعة

[illegible] مجردة من الحدود [illegible]

٣ - بعض التطبيقات في المسائل المتعلقة بالنهايتين

الكبرى والصغرى

[illegible] اذا فرضنا أن [illegible] واحدة من دلالة المتغير س [illegible]

[illegible] مقدار مخصوص [illegible] على مقدار الدالة

[illegible] المذكور

[illegible]

[illegible]

[illegible]

كانت هذه الدلالة كمية سالبة تحصلت من المقدار س = م نهاية هي الكبرى وان كانت موجبة تحصلت منه نهاية هي الصغرى

مثلا اذا كان $د(س) = س^{٣} - ٩ س^{٢} + ١٥ س - ٣$ وجعلت الدلالة المشتقة من الدلالة ذات الدرجة الاولى مساوية للصفر تحصلت من ذلك المعادلة

$$س^{٢} - ٦ س + ٥ = ٠$$

التي يكون جذراها ١ و ٥ وحيث ان المقدار س = ١ يصير الدلالة $د''(س)$ مساوية للمقدار −١٢ فيكون المقدار الذي تأخذه الدلالة د(س) في فرض س = ١ هو النهاية الكبرى وحيث ان المقدار س = ٥ يصير الدلالة $د''(س)$ مساوية للمقدار +١٢ فيترتب عليه ان الدلالة د(س) تكون هي النهاية الصغرى

وان كان $د(س) = س^{٣} - ٣ س^{٢} + ٣ س + ٧$

وكانت المشتقة الاولى من هذه الدلالة هي $٣ س^{٢} - ٦ س + ٣$ أو $٣ (س - ١)^{٢}$ فلا يمكن انعدامها الا في فرض س = ١ وحيث ان هذا المقدار المفروض للمتغير س يصير الدلالة $د''(س)$ معدومة والدلالة $د'''(س)$ كمية غير معدومة فلا يكون للدلالة

(٤١٦)

في الملاصقة مع الكمية ك واذا لايمكن ان تكون الدلالة د(حـ) هي النهاية الكبرى ولا الصغرى

واذا كانت الدلالة دَ(حـ) معدومة وكانت الدلالة دً(حـ) غير معدومة كان الفرق د(حـ+ك) - د(حـ) متحدًا في العلامة دائمًا مع ك بشرط ان تكون هذه الكمية صغيرة بالكفاية وحينئذ اذا كانت الدلالة دً(حـ) كمية سالبة كانت الدلالة د(حـ) هي النهاية الكبرى واذا كانت الدلالة دً(حـ) كمية موجبة كانت الدلالة د(حـ) هي النهاية الصغرى

فاذا كانت الدلالة دَ(حـ)=٠ والدلالة دً(حـ)=٠ في آن واحد فلا يتحصل من المقدار س=حـ واحدة من النهايتين الكبرى او الصغرى مالم تكن الدلالة د‴(حـ)=٠ ايضًا لانه يتحصل في هذه الحالة للمقدار س=حـ نهاية هي الكبرى اذا كانت الدلالة د⁗(حـ) كمية سالبة ونهاية اخرى هي الصغرى اذا كانت الدلالة د⁗(حـ) كمية موجبة

ويلزم على العموم لكي تتحصل من المقدار س=حـ النهاية الكبرى او الصغرى للدلالة د(س) ان تكون الدلالة الاولى التي لم تنعدم من بين مشتقات الدلالة د(س) مشتقة زوجية المرتبة فان كانت

حتى انعدمت وحينئذ يكون مدلالة $د(س)$ نهاية هي الكبرى ——

$\frac{\text{بند}}{٢٥٥}$ فاذا وضع $س$ بدل $ح$ في المتساوية (١) وقسم طرفاها على $ك$ تحصل

$$\frac{د(س+ك)-د(س)}{ك}=د'(س)+\frac{ك}{١×٢}د''(س)+\frac{ك^٢}{١×٢×٣}د'''(س)+لخ$$

وحيث ان الدلالات المشتقة $د'(س)$ و $د''(س)$ و لخ تامة بالنسبة الى $س$ فتكون لها دائماً مقادير انتهائية ما دام للمتغير $س$ مقدار انتهائي وحينئذ يمكن أخذ الكمية $ك$ صغيرة بالكفاية حتى يكون المقدار الرقمي للكمية

$$\frac{ك}{١×٢}د''(س)+\frac{ك^٢}{١×٢×٣}د'''(س)+لخ$$

دون عدد مفروض كالعدد $ط$ الذي يقرب من الصغر بقدر ما يراد كما تقدم (في بند ٢٢٨) وحينئذ يتحصل

$$\frac{د(س+ك)-د(س)}{ك}>د'(س)-ط\;\frac{د(س-ك)-د(س)}{ك}$$

$<د'(س)+ط$

وبناء على ذلك اذا اخذت كمية مزدلالة تامة في الازدياد بالتدريج كانت النسبة بين هذا الازدياد وهذه الكمية المتغيرة نسبة انتهائية مساوية بالتقريب للمقدار الذي تأخذه الدلالة

المفروضة واحدة من النهايتين الكبرى والصغرى

ومتى كانت الدلالة دَ(ح) غير معدومة كان الفرق د(ح+ك) بند ٢٥٤

ـ د(ح) بالنسبة لمقادير موجبة دون الكمية ك متحداً في العلامة

مع الدلالة دَ(ح) وبناءً على ذلك اذا فرض للمتغير مقادير آخذة في

الزيادة أخذت الدلالة د(س) في الزيادة ان كانت المشتقة

دَ(س) كمية موجبة وفي التناقص ان كانت هذه المشتقة كمية سالبة

ويمكن ان يستنبط من هنا انه اذا كانت الدلالة د(س) هي النهاية

الكبرى أو الصغرى كان دَ(س)=٠ لانه يلزم بسبب ان الدلالة

د(س) لا تزال آخذة في الزيادة الى الحد الذى تأخذ منه في التناقص

أو انها لا تزال آخذة في التناقص الى الحد الذى تأخذ منه في الزيادة

ان علامة الدلالة دَ(س) تتغير وهذا لا يتأتى الا اذا انعدمت

هذه الدلالة وكذلك اذا كانت المشتقة دً(س) كمية موجبة

تزايدت الدلالة دَ(س) وأخذت في الانتقال من السلب

الى الايجاب حتى انعدمت وبناءً على ذلك يكون للدلالة د(س).

نهاية هي الصغرى واذا كانت المشتقة دً(س) المذكورة كمية

سالبة اخذت الدلالة دَ(س) في الانتقال من الايجاب الى السلب

وحيث ان المكورات جـ و بـ و هـ و و و ج كميات غير متغيرة على التقسيم [illegible] يراد تعيينها فيلزم ان تحصل من الخارج المذكور بواسطة ضربه في الكمية الكثيرة الحدود م + ٢ س + ٣ س² + ٤ س³ المقسوم حـ + د س + هـ س² م وباجراء عملية الضرب يتحصل حاصل الضرب

م جـ	س + م هـ	س² + م و	س³ + م ن
+ م بـ	+ ٢ بـ	+ ٢ هـ	+ ٢ و
+ ٢ جـ	+ ٣ جـ	+ ٣ بـ	+ ٣ هـ
		+ ٤ جـ	+ ٤ بـ

ويلزم لكي يكون هذا الحاصل مساويا للمقسوم ان مكورات الحدود الثلاثة الاول تكون مساوية بالتناظر لمكورات الثلاثة حـ و د و هـ وان مكورات باقي الحدود تكون معدومة وبناء على ذلك يكون

م جـ = حـ
م بـ + ٢ جـ = د
م هـ + ٢ بـ + ٣ جـ = هـ
م و + ٢ هـ + ٣ بـ + ٤ جـ = ٠
م ن + ٢ و + ٣ هـ + ٤ بـ = ٠

فاما المعادلة الاولى فيتحصل منها مقدار المكور جـ واما الثانية فيحدث منها مقدار المكور بـ بواسطة مقدار المكور جـ واما المعادلة الثالثة فيعلم منها مقدار المكور هـ بواسطة مقداري المكورين

ذات المرتبة الأولى المشتقة من الدلالة المفروضة بالنسبة للمقدار الأصلي المفروض للكمية المتغيرة المذكورة

أو ان الدلالة ذات المرتبة الاولى المشتقة من دلالة تامة لكمية متغيرة تكون كناية عن نهاية النسبة الواقعة بين كل من ازدياد الدلالة المذكورة وازدياد الكمية المتغيرة

في ضرب الكسرات غير الجبرية

بند ٣٥٦ قد تقدم انه اذا اجريت عملية قسمة وكانت فيها المقسوم والمقسوم عليه مرتبين بحسب الدرجات التصاعدية لكمية كالكمية س امكن تحصيل خارج مركب من جملة حدود مرتبة بحسب الدرجات التصاعدية للحرف س وممتد الى غير نهاية واستخراجات جذور الكميات الجبرية توصل الى تحليلات لكميات مركبة من جمل غير متناهية ولنبرهن على انه يمكن ايضاً تحليل مقدار كسري او غير منطق بدون أن نطلق على ذلك عملية قسمة او استخراج جذر فنفرض في مبدأ الامر كسر

$$\frac{جـ + د س + هـ س^2}{م + ح س + ط س^2 + ك س^3}$$

ثم نرمز الى خارج قسمة هذا الكسر بالجملة

$$جـ + ا س + ب س^2 + و س^3 + \dots$$

وحيث

[illegible] في الطرف الثاني من المعادلة (١) [illegible]

[illegible] حد [illegible]

(٢) ... (حـ + س) [illegible] حـ + م حـ س + [illegible]

و [illegible]

فاذا وضع في هذه المعادلة س + ع بدل س فانها [illegible]

(٣) ... (حـ + س + ع) = حـ + م حـ (س + ع) + [illegible] حـ (س + ع) [illegible]

+ م [illegible] (س + ع) + [illegible] (س + ع) + [illegible]

ويمكن ايضا تحصيل تحليل كمية (حـ + س + ع) بهذه الطريقة وهي

ان يوضع في المعادلة (٢) حـ + س بدل حـ و ع بدل س فيحصل

(٤) ... (حـ + س + ع) = (حـ + س) + م (حـ + س) [illegible]

ع + [illegible] (حـ + س) ع + [illegible]

وحيث ان الطرفين الثانيين من المعادلتين (٣) و (٤) كناية

عن مقداري كمية واحدة مختلفين في الوضع فيلزم ان يكونا

متساويين ولما كان هذا التساوي لا يزال باقيا على حاله

مادام لا ينسب للكمية ع مقدار مخصوص لزم ان تكون

مكررات قوى ع متساوية

وأما المعادلة الرابعة وما بعدها من المعادلات التي مثلها ء و م
في الوضع فان مكررت خارج القسمة تحصل منها بالابتداء من مكرر القوة
الثالثة للمتغير س بهذه المثابة وهي ان تجمع المكررات الأربعة
السابقة على بعضها بعد أن تضرب بالتناظر في النسب ب/م و ج/م و د/م
ويسهل تحصيل تحليلات الكميات الحادثة من المقادير غير المنطقة متى علم تحليل الكمية (١+س)^م بفرض الاس م عددا كسريا موجبا
أو سالبا وحيث ان الكمية المرفوعة الى قوة درجتها كسر عبارة عن
جذر هذه الكمية بدرجة مساو لمقام هذا الكسر بعد رفعها
الى القوة التي درجتها بسطه فان كانت مرتبة بحسب الدرجات
المتصاعدية او التنازلية كان جذرها كذلك وحينئذ يوضع.

(١) ... (١+س)^م = ١ + ج س + ب س^٢ + هـ س^٣ + و س^٤ + الخ

وحيث أن المكررات ج و ب و هـ و و الخ كميات غير محتوية على
متغير س سيراد تعيينها فيعلم مباشرة انه يلزم ان يكون الحد
الأول من تحليل الكمية مساويا للواحد لان المقدار (١+س)^م يؤول الى ١ متى
فرضت س = ٠

واذا كانت (ع+س)^م = ع^م (١ + س/ع) فانه يحصل من ذلك تحليل الكمية
عدد (ع+س)^م

ومن المعادلة ...

ويكون مكرر القوة الاولى ... بسيطا بالصورة

وحيث انه يلزم جعل المقدار الاول مساويا للجزء الذى لا يحتوى على ي فى الطرف الثانى من المعادلة (٤) فتتكون من ذلك المعادلة (٦) وبجعل المقدار الثانى مساويا المكرر القوة الاولى للكمية ي فى الطرف الثانى من المعادلة (٤) تتكون من ذلك المعادلة

فاذا ضرب طرفا هذه المعادلة فى ح + س واستعوضت الكمية (ح+س)^م بالطرف الثانى من المعادلة (١) تحصل من ذلك المعادلة

(٥)

وحيث ان المكررات ... هى هذه المعادلة

ينزم لاجل [illegible] الضرب المتنوعة للكمية ى في الطرف
الثاني من المعادلة [illegible] الابتداء بتحليل المقادير $(س+ى)^{م}$
و $(س+ى)^{م}$ [illegible]
وحيث أن أس هذه القوى اعداد صحيحة فنعلم تحليلات هذه
المقادير مما تقدم لكن لما كانت الطريقة التى تصدينا لذكرها للتوصل
بها الى تحليل الكمية $(ه+س)^{م}$ غير مرتبطة بالاثبات المتقدم
يمكن تطبيقها على الحالة التى يكون فيها م كناية عن عدد كسرى
موجب أو سالب
فاذا اجريت عملية الضرب على تحليلات الكميات $(س+ى)^{م}$
و $(س+ى)^{ن}$ و كذا فانه يشاهد بمثل ذلك ان الحدين الاولين
من تحليل الكمية $(س+ى)^{م}$ (بجعل م كناية عن عدد صحيح)
يكونان عبارة عن $س^{م} + م ى س^{م-١}$ ويمكن ايضا ان يبرهن
بواسطة عملية الضرب على انه اذا كان تركيب الحدين الاولين
محققا فى القوة النونية كان محققا ايضا فى القوة (م + ١)
ومن هنا يؤخذ ان هذا التركيب يكون عموميا
وبذلك يشاهد ان الجزء الذى لا يحتوى على ى فى الطرف الثانى
من

الاحوال ... [illegible]

المتعددة $(ا+س)^م$ ... [illegible] ... $(ا+س)^م$ ... [illegible]

الاولين من تحليل الكمية $(ا+س)^م$ هما $ا+م س$ ويؤخذ من

قاعدة الجذور ان الحدين الاولين من تحليل الكمية $(ا+س)^{\frac{1}{م}}$ هما

$ا+\frac{1}{م}س$ ومن قاعدة القسمة ان الحدين الاولين من تحليل الكمية

$(ا+س)^{-م}$ هما $ا-م س$ وحينئذ يكون $ج=م$ في جميع

الاحوال

ونعوض في [illegible] في المعادلات السابقة [illegible]

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

ونستنتج بالنسبة للارتباط الواقع بين مكررات [illegible]

$$[illegible]$$

فاذا وضعت مقادير المكررات [illegible]

في المعادلة (ا) تحصلت من ذلك المعادلة

$$(ا+س)^م = ا + م س + \frac{م(م-1)}{1\times2}س^2 + \frac{م(م-1)(م-2)}{1\times2\times3}س^3 + \dots$$

وفي نصه ... بمة عبارة عن اعداد ليس لها ارتباط بالكميتين
د و س وان المعادلة المفروضة تتحقق بدون ان تفرض مقادير
مخصوصة لكل من د و س فلابد من وقوع التساوي بين
مكررات قوى س و د ومن هنا تتكون المعادلات

٢ د + م/١ = م²/١ ن	ومن هنا ينتج	د = م/١ (م/١ − ١) ن / ٢
٣ هـ + ٢ د = م/١ د ن		هـ = د/١ (م/١ − ٢) ن / ٣
٤ و + ٣ هـ = م/١ هـ ن		و = هـ/١ (م/١ − ٣) ن / ٤
ع		ع

ويسهل تناول القانون الذي قد تكونت بمقتضاه هذه المعادلات
ومنه يؤخذ انه اذا رمز بالرمزين ر و ك الى مكرري الكميتين
س^(م/١ − ١) و س^م في الطرف الثاني من المعادلة (١) حدث
م ك + (م − ١) ر = م/١ ر ومن هنا ينتج ان ك = ر(م/١ − م + ١) / م
ويمكن ايضا تحصيل هذه المعادلة بهذه الكيفية وهي ان يوضع
في المعادلة (١) الحدان ر س^(م/١ − ١) + ك س^م وفي المعادلات
التي بعدها الحدود المناظرة ... الحدين
وحيث انه لم يبق علينا غير تعيين المكرر م فنقول اذا كان
الاس م

بعد أن قابل معي فيه المعادات الأمير * محمد مصطفى افندي

صاحب الاخلاق المرضية * ايده الله من حكم المؤلفات

وابدعها * واتقن المصنفات واتقنها * وصلى الله على خاتم النبيين

ورسول الملك الحق المبين * سيدنا محمد الهادي الامين * وعلى آله

وصحبه الراشدين المرشدين * ما لاح بسماء

الفهوم بدر تمام * وفاح بمحافل

العلوم مسك

ختام

تم

كتبه أضعف العباد الراجي عفو مولاه الشكور عبده محمد افندي مذكور

وقد صار طبع هذا الكتاب بعون الله الملك الوهاب بمطبعة مدرسة

المهندسخانة الخديوية ببولاق في ثلاثة عشر خلت من شهر

جمادى الاولى المذكور من شهور سنة الف ومايتين وتسع وستين

من الهجرة النبوية على صاحبها افضل الصلاة

واجل التحية

امين

فأما عدد حروف ... ح في الطرف الثاني من هذه المعادلة (٢٩)

والحد العمومي فإن مقداره يكون مبيناً بالصورة

$$\frac{م(م-١)(م-٢)\cdots(م-ح+١)}{١\times٢\times٣\cdots ح}$$

بأن كان م دالاً على عدد [illegible] وجب كان تحليل الكمية

متتابعة منتهياً بالحد [illegible] إذا كان ح = م + ١ أو

ح > م + ١ كان تكرر الحد العمومي معدوماً وإن كان م

دالاً على كسر أو على عدد سالب استمر تحليل الكمية المفروضة

إلى غير نهاية

قال مترجم عبارات هذا الكتاب ومصححها * ومنظم ألفاظها

وموضحها * راجي رحمة المعيد المبدي * السيد صالح افندي مجدي

احد مترجمي العلوم الرياضية * ومدرسي اللغة الفرنساوية *

بمدرسة المهندسخانة الخديوية * الكائنة ببولاق مصر المحمية * إلى هنا

انتهى الجزء الثاني من المنحة الزهرية * في الأعمال الجبرية * وقد قابله

على طلبة الفن * وبكل ميم جمله وحلاه * المصحح فيما بعد

وما بعده * أحد معيدي العلوم الرياضية بتلك المدرسة عثمان حسن افندي